# Connexions et fibrés plats

Maxence Mayrand
Département de mathématiques
Université de Sherbrooke

22 juin 2023

## 1 Introduction

Informellement, on peut voir l'étude des fibrés vectoriels comme de l'algèbre linéaire paramétrée. C'est-à-dire qu'au lieu de travailler avec des espaces vectoriels fixes, on travaille avec des familles d'espaces vectoriels $E_p$ paramétrés par un point $p$ dans une variété lisse $M$, et qui varient de manière lisse par rapport à $p$. Toute structure en algèbre linéaire, comme une somme directe ou un produit scalaire, a une généralisation directe sur les fibrés vectoriels, où ces structures varient de manière lisse par rapport au paramètre $p$. L'étude des connexions vient quand on veut aller un peu plus loin que l'algèbre linéaire et faire du *calcul différentiel* sur les espaces $E_p$. On souhaite donc une théorie du calcul vectoriel paramétré.

La première chose à faire est alors d'établir une notion de dérivée d'une section $s : M \to E$. C'est-à-dire, si on a un vecteur $s(p) \in E_p$ pour tout $p \in M$ variant de manière lisse par rapport à $p$ et un vecteur tangent $v \in T_pM$, on veut pouvoir définir le taux de variation de $s$ dans la direction $v$, noté $\nabla_v s \in E_p$. Le problème est que, en général, il n'y a pas de façon canonique de définir cette dérivée $\nabla_v s$. Il faut introduire une structure additionnelle sur $E$ pour y arriver. Cette structure, c'est ce qu'on appelle une *connexion*, et intuitivement, c'est une façon de "connecter" les fibres infiniment près. Le premier but de ces notes est alors de comprendre cette correspondance

$$\textit{façon de dériver les sections} \xleftrightarrow{1:1} \textit{façon de connecter les fibres infiniment près.}$$

Nous allons ensuite définir la notion de courbure, qui caractérise à quel point notre notion de dérivée diffère de celle sur un espace vectoriel fixe. On définira ensuite le transport parallèle, qui est une façon "d'intégrer" la notion de connexion entre les fibres infiniment près à une connexion entre des fibres éloignées. Finalement, nous appliquerons cette notion de transport parallèle à des lacets sur des fibrés de courbure nulle, pour obtenir une représentation du groupe fondamentale de $M$. Nous verrons ensuite comment paramétrer l'ensemble des connexions munies d'une connexion de courbure nulle avec un espace de représentations de $\pi_1(M)$.

D'autres références utiles sur ce sujet sont [2], [1], [4], et [3].

## 2 Connexions et dérivées

Soit $\pi : E \to M$ un fibré vectoriel. On note l'ensemble des sections lisses comme $\Gamma(E)$, c'est-à-dire, $\Gamma(E)$ est l'ensemble des applications lisses $s : M \to E$ telles que $\pi \circ s = \mathrm{Id}_M$. Soit $v \in T_pM$ un vecteur tangent, on veut pouvoir donner un sens à la notation $\nabla_v s$, représentant le taux de variation de $s$ dans la direction de $v$. Pour faire du sens, elle doit respecter les règles habituelles d'une dérivée, comme la linéarité, par exemple. Plus précisément, on a la définition suivante :

**Définition 2.1.** Une ***connexion*** sur un fibré vectoriel $\pi : E \to M$ est une application

$$\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E)$$

telle que

(1) (Linéarité en $v$.) On a $\nabla_{fv}\sigma = f\nabla_v\sigma$ et $\nabla_{u+v}\sigma = \nabla_u\sigma + \nabla_v\sigma$ pour toute fonction $f \in C^\infty(M)$, tous champs de vecteurs $u, v \in \Gamma(TM)$, et toute section $\sigma \in \Gamma(E)$.

(2) (Règle de Leibniz.) On a $\nabla_v f\sigma = (vf)\sigma + f\nabla_v\sigma$ et $\nabla_v(\sigma+\tau) = \nabla_v\sigma + \nabla_v\tau$, pour toute fonction $f \in C^\infty(M)$, tout champ de vecteurs $v \in \Gamma(TM)$, et toutes sections $\sigma, \tau \in \Gamma(E)$.

C'est la bonne définition, mais à première vue, elle apporte plus de questions que de réponses. D'abord, pourquoi on l'appelle une connexion ? Est-ce qu'on a des exemples ? Pourquoi faut-il définir la dérivée de cette façon ? N'y a-t-il pas une façon canonique de dériver des sections ? Le but de cette section est de répondre à ces questions.

Commençons simplement : soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction lisse. Il n'y a alors pas d'ambiguïté : on a les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ qui représentent le taux de variation de $f$ dans les directions des vecteurs $(1,0)$ et $(0,1)$, respectivement. Rappelons que pour tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t},$$

et une formule similaire pour $\frac{\partial}{\partial y}$. Plus généralement, soit un vecteur $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, la dérivée $v_1\frac{\partial f}{\partial x} + v_2\frac{\partial f}{\partial y}$ représente le taux de variation de $f$ dans la direction de $\mathbf{v}$. En voyant $\mathbf{v}$ comme un vecteur tangent $v = v_1\frac{\partial}{\partial x} + v_2\frac{\partial}{\partial y}$, on note cette dérivée par

$$\nabla_v f = df(v) = v_1\frac{\partial f}{\partial x} + v_2\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+tv_1, y_0+tv_2) - f(x_0, y_0)}{t}.$$

Ceci peut aussi être écrit

$$\nabla f = df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy,$$

où $dx, dy \in T_p^*\mathbb{R}^2$ est la base duale à $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \in T_p\mathbb{R}^2$.

Pour généraliser aux fibrés, il est utile de rééecrire cette dérivée de la manière suivante. Soit $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ un chemin lisse tel que $\gamma(0) = p \in \mathbb{R}^2$ et $\dot\gamma(0) = v$. On a alors

$$\nabla_v f = \lim_{t\to 0} \frac{f(\gamma(t)) - f(t)}{t}.$$

La définition précédente a du sens plus généralement. Soit $M$ une variété lisse et

$$f : M \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$$

une fonction lisse. Pour tout $v \in T_pM$, on peut alors définir

$$\nabla_v f = \begin{pmatrix} v(f_1) \\ \vdots \\ v(f_m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} df_1(v) \\ \vdots \\ df_m(v) \end{pmatrix} = \lim_{t\to 0} \frac{f(\gamma(t)) - f(p)}{t} \in \mathbb{R}^m,$$

où $\gamma : \mathbb{R} \to M$ est tel que $\gamma(0) = p$ et $\dot\gamma(0) = v$. Si on a des coordonnées $(x^1, \ldots, x^n)$ près du point $p$, on peut exprimer cette dérivée par

$$\nabla f = df = \begin{pmatrix} df_1 \\ \vdots \\ df_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x^1}dx^1 + \cdots + t\frac{\partial f_1}{\partial x^n}dx^n \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x^1}dx^1 + \cdots + \frac{\partial f_m}{\partial x^n}dx^n \end{pmatrix}.$$

Notons qu'une fonction $f : M \to \mathbb{R}^m$ est équivalente à une section du fibré vectoriel trivial $E = M \times \mathbb{R}^m$. Dans ce cas, on peut voir aisément que $\nabla$ définit bel et bien une connexion au sens de la définition 2.1.

Maintenant, soit $E \to M$ un fibré vectoriel et $s : M \to E$ une section. On peut essayer d'imiter les définitions précédentes et définir pour tout $v \in T_pM$ la dérivée

$$\nabla_v s \stackrel{?}{=} \lim_{t\to 0} \frac{s(\gamma(t)) - s(p)}{t},$$

où $\dot\gamma(0) = v$. Le problème avec cette approche est qu'elle ne fait aucun sens, car $s(\gamma(t)) \in E_{\gamma(t)}$ et $s(p) \in E_p$ sont dans des espaces vectoriels différents et la soustraction $s(\gamma(t)) - s(p)$ n'est alors pas définie. Pour définir une dérivée, il faut donc connecter les fibres $E_{\gamma(t)}$ et $E_p$ par une application linéaire $P_t^\gamma : E_{\gamma(t)} \to E_p$ et remplacer la définition précédente par

$$\nabla_v s = \lim_{t\to 0} \frac{P_t^\gamma(s(\gamma(t))) - s(p)}{t},$$

Puisque la dérivée ne dépend que de $s(\gamma(t))$ pour $t$ infiniment près de 0, il suffit de connaître $P_t^\gamma$ pour $t$ arbitrairement près de 0. En fait, on verra que cette dérivée ne dépend que de la dérivée de $P_t^\gamma$. Comme c'est un problème local, on peut travailler avec une trivialisation et supposer que $E = U \times \mathbb{R}^m$, où $U$ est un ouvert dans $\mathbb{R}^n$. Une section $s : M \to E$ est alors équivalente à une fonction $f : U \to \mathbb{R}^m$, où $s(p) = (p, f(p))$. Donc $P_t^\gamma : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ et puisque $L_0 = I$, on a

$$P_t^\gamma = I + tA^\gamma + O(t^2) : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

pour une matrice $A^\gamma \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. On voit alors que

$$\lim_{t\to 0} \frac{P_t^\gamma(f(\gamma(t))) - f(p)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(\gamma(t)) + tA^\gamma f(\gamma(t)) + O(t^2) - f(p)}{t} = df(v) + A^\gamma f(p) \in \mathbb{R}^m.$$

Autrement dit, pour définir la dérivée, on a besoin que de connaître du terme du premier ordre $A^\gamma$. C'est ce qu'on veut dire par connecter les fibres "infiniment près".

Pour satisfaire la définition d'une connexion, les matrices $A^\gamma$, doivent dépendre linéairement du vecteur $v$. C'est-à-dire, on a besoin d'une application

$$A : TU \longrightarrow \mathrm{M}_m(\mathbb{R}),$$

où $\mathrm{M}_m(\mathbb{R})$ est l'espace des matrices réelles $m \times m$, et est telle que les restrictions $A : T_pU \to \mathrm{M}_m(\mathbb{R})$ sont linéaires pour tout $p \in U$.

**Définition 2.2.** Soit $M$ une variété lisse, une ***1-forme à valeur dans*** $\mathrm{M}_m(\mathbb{R})$ est une fonction lisse $A : TM \to \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ telle que chaque restriction $A : T_pM \to \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est linéaire.

Autrement dit, $A$ est une matrice de 1-formes.

On a alors :

**Proposition 2.3.** *Soit $M$ une variété lisse et $A : TM \to \mathrm{M}_m(\mathbb{R})$ une 1-forme à valeurs dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Pour toute fonction lisse $f : M \to \mathbb{R}^m$ et vecteur $v \in T_pM$, soit*

$$\nabla_v f := df(v) + A(v)f(p)$$

*Alors, $\nabla$ est une connexion sur le fibré trivial $E = M \times \mathbb{R}^m$. Inversement, toute connexion sur $E$ est de cette forme.*

En coordonnées $(x^1, \ldots, x^n)$ sur un ouvert $U \subseteq M$, on peut écrire

$$\nabla = d + A$$

où

$$df = \begin{pmatrix} df_1 \\ \vdots \\ df_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x^1} dx^1 + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial x^n} dx^n \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x^1} dx^1 + \cdots + \frac{\partial f_m}{\partial x^n} dx^n \end{pmatrix}$$

et

$$A = A_1 dx^1 + \cdots + A_n dx^n,$$

où $A_i : U \to \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour le cas général, rappelons qu'un fibré vectoriel $E \to M$ non trivial peut être obtenu par des cocycles. C'est-à-dire, on a un recouvrement $M = \bigcup_\alpha U_\alpha$ par des ouverts $U_\alpha \subseteq M$ et des fonctions lisses $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$, et $E = (\bigcup_\alpha U_\alpha \times \mathbb{R}^m)/\sim$ où $(p, v) \in U_\alpha \times \mathbb{R}^m$ est équivalent à $(q, w) \in U_\beta \times \mathbb{R}^m$ si et seulement si $p = q$ et $w = g_{\alpha\beta}(p)v$. Une section $s$ de $E \to M$ est alors équivalente à des fonctions $f_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^m$ telles que $f_\alpha(p) = g_{\alpha\beta}(p) f_\beta(p)$ pour tout $p \in U_\alpha \cap U_\beta$. En choisissant une 1-forme à valeurs dans $M_m(\mathbb{R})$

$$A^\alpha : TU_\alpha \longrightarrow \mathrm{M}_m(\mathbb{R})$$

pour tout $\alpha$, on a une connexion $\nabla^\alpha = d + A^\alpha$ sur chaque restriction $E|_{U_\alpha} = U_\alpha \times \mathbb{R}^m$. Pour quelles soient compatible, on doit avoir que si $s$ est une section donnée par des fonctions $f_\alpha$ et $v \in \Gamma(TM)$ est un champ de vecteurs, alors les fonctions $\nabla^\alpha_v f_\alpha \to E$ définissent une section, c'est-à-dire,

$$\nabla^\alpha f_\alpha = g_{\alpha\beta} \nabla^\beta f_\beta$$

sur $U_\alpha \cap U_\beta$. En utilisant que $f_\alpha = g_{\alpha\beta} f_\beta$ et la définition de $\nabla^\alpha$, on trouve la condition (Exercice (2))

$$A^\beta = g_{\alpha\beta}^{-1} A^\alpha g_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta}^{-1} dg_{\alpha\beta}.$$

**Proposition 2.4.** *Soit $E \to M$ un fibré vectoriel donné par des cocycles $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$. Une connexion sur $E$ est équivalente à des 1-formes à valeurs dans $\mathrm{M}_m(\mathbb{R})$,*

$$A^\alpha : TU_\alpha \longrightarrow \mathrm{M}_m(\mathbb{R}),$$

*telles que pour tout $\alpha$ et $\beta$, on a*

$$A^\beta = g_{\alpha\beta}^{-1} A^\alpha g_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta}^{-1} dg_{\alpha\beta} \tag{2.1}$$

*sur l'intersection $U_\alpha \cap U_\beta$.*

On peut se demander si tout fibré admet une connexion, c'est-à-dire, si les équations (2.1) peuvent toujours être résolues. Notez qu'il n'est pas toujours possible de prendre $A^\alpha = 0$ pour tout $\alpha$, car cela impliquerait que $dg_{\alpha\beta} = 0$, c'est-à-dire, les cocyles $g_{\alpha\beta}$ sont localement constants, ce qui n'est pas toujours le cas. Néanmoins, on a :

**Proposition 2.5.** *Tout fibré vectoriel $\pi : E \to M$ admet une connexion $\nabla$.*

*Démonstration.* Soit $\{U_\alpha\}_\alpha$ un recouvrement de $M$ avec des trivialisations $E|_{U_\alpha} \cong U_\alpha \times \mathbb{R}^m$ et $\psi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}$ une partition de l'unité. Par les trivialisations, sur chaque $E|_{U_\alpha}$ on peut définir une connexion $\nabla^\alpha$. On définit

$$\nabla_v s = \sum_\alpha \nabla^\alpha_{v|_{U_\alpha}} (\psi_\alpha s).$$

On laisse en exercice le soin de vérifier que $\nabla$ est une connexion sur $E$. □

# 3 Courbure

On peut se demander s'il n'est pas possible de définir des connexions simplement avec $\nabla = d$ sur chaque trivialisation, c'est-à-dire, $A^\alpha = 0$ pour tout $\alpha$. On peut voir avec (2.1) que c'est possible si et seulement si il existe des cocycles $g_{\alpha\beta}$ définissant $E$ qui soient localement constants. Lorsqu'il est possible de trouver de telles fonctions $g_{\alpha\beta}$, on appelle $E$ un ***fibré plat***. Plus généralement, la courbure d'une connexion, que nous définirons dans cette section, est une façon intrinsèque de mesurer à quel point $E$ dévie d'un fibré plat. On verra que si cette courbure est nulle, il existe alors des cocycles $g_{\alpha\beta}$ localement constants.

Pour motiver la définition de la courbure, revenons au problème de trouver une trivialisation $E|_U \cong U \times \mathbb{R}^m$ dans laquelle $\nabla$ est équivalente à la connexion canonique sur $U \times \mathbb{R}^m$, c'est-à-dire $\nabla = d$. Notons qu'une trivialisation de $E$ sur $U$ est équivalente à un choix de sections $e^1, \ldots, e^m : U \to E$ telles que

$e^1(p), \ldots, e^m(p)$ est linéairement indépendant pour tout $p \in U$. En effet, chaque vecteur $v \in E|_U$ peut alors être écrit $v = \sum_i c_i e^i(p)$, et l'application

$$E|_U \to U \times \mathbb{R}^m, \quad v = \sum_i c_i e^i(p) \longmapsto (p, (c_1, \ldots, c_m))$$

est une trivialisation. Sur la trivialisation $U \times \mathbb{R}^m$, la connexion prend la forme $d + A$ où $A : TU \to \mathrm{M}_m(\mathbb{R})$, et on peut voir que $A$ est définie par $\nabla_v e^i = A^i_j(v) e^j$. On a alors que $A = 0$ si et seulement si $\nabla e^i = 0$ pour tout $i$. Une section $s : M \to E$ satisfaisant $\nabla s = 0$ est appelée une ***section plate***.

**Proposition 3.1.** *Soit $E \to M$ un fibré vectoriel et $\nabla$ une connexion. Il existe une trivialisation $E|_U \cong U \times \mathbb{R}^m$ telle que $\nabla$ correspond à la connexion triviale sur $U \times \mathbb{R}^m$ si et seulement si il existe une base de sections plates $e^1, \ldots, e^m : U \to E$.*

Étudions la question de l'existence de ces sections plates plus en détail. Comme c'est un problème local, on peut supposer que $E = U \times \mathbb{R}^m$ est trivial sur un ouvert $U \subseteq \mathbb{R}^n$ et que $\nabla = d + A$. Soit $A_i = A(\frac{\partial}{\partial x^i})$, c'est-à-dire $A = A_1 dx^1 + \cdots + A_n dx^n$. On veut alors des solutions $e : U \to \mathbb{R}^m$ de l'équation

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} e = \frac{\partial e}{\partial x^j} + A_j e = 0,$$

qui est une équation aux dérivées partielles. Pour voir une obstruction à l'existence d'une solution, on considère

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 e}{\partial x^i \partial x^j} &= \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial e}{\partial x^j}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x^i}(-A_j e) \\
&= -\frac{\partial A_j}{\partial x^i} e - A_j \frac{\partial e}{\partial x^i} \\
&= -\frac{\partial A_j}{\partial x^i} e + A_j A_i e \\
&= \left(-\frac{\partial A_j}{\partial x^i} + A_j A_i\right) e
\end{aligned}$$

En faisant le même calcul dans l'autre ordre, on trouve

$$\frac{\partial^2 e}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 e}{\partial x^j \partial x^i} = \left(-\frac{\partial A_i}{\partial x^j} + A_i A_j\right) e.$$

En combinant ces deux calculs, on trouve

$$\left(\frac{\partial A_j}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^j} + [A_i, A_j]\right) e = 0.$$

Soit

$$F_{ij} \coloneqq \frac{\partial A_j}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^j} + [A_i, A_j]$$

On a donc montré que s'il existe une base de sections plates, alors $F_{ij} = 0$ pour tout $i, j$. Le célèbre théorème de Frobenius en EDP montre que l'inverse est vrai. Les fonctions de matrices $F_{ij}$ caractérisent alors la déviance de $\nabla$ à être une connexion localement triviale. C'est en fait l'expression locale de la courbure. C'est-à-dire, on a une 2-forme à valeur dans $M_m(\mathbb{R})$,

$$F = F_{ij} dx^i \wedge dx^j : TU \times TU \longrightarrow \mathrm{M}_m(\mathbb{R}),$$

qui peut être vue de manière plus invariante comme un élément

$$F_\nabla \in \Omega^2_M(\mathrm{End}\, E),$$

appelée la ***courbure*** de $\nabla$. On peut aussi définir $F_\nabla$ directement sans passer par des trivialisations locales par la formule

$$F_\nabla(u, v)s = \nabla_u \nabla_v s - \nabla_v \nabla_u s - \nabla_{[u,v]} s.$$

**Proposition 3.2.** *Soit $E \to M$ un fibré muni d'une connexion $\nabla$. Alors, $\nabla$ est localement trivialisable si et seulement si $F_\nabla = 0$. Dans ce cas, on peut trouver des cocycles localement constants.*

# 4 Transport parallèle

Si $E = M \times \mathbb{R}^m$ est un fibré trivial, il y a une façon canonique de transporter un vecteur $v \in E_x$ le long d'un chemin $\gamma : [0,1] \to M$ avec $\gamma(0) = x$. On a $v = (x, \mathbf{v})$ et on définit $v(t) = (\gamma(t), \mathbf{v})$. Autrement dit, on garde les coordonnées de $\mathbf{v}$ constantes. Pour un fibré non trivial, il n'y a pas de façon canonique de le faire. On peut le définir sur chaque trivialization, mais la définition dépend du choix de trivialization. Par contre, le choix d'une connexion permet de définir un transport parallèle. On a déjà mentionné qu'une connexion est une façon de connecter les fibres infiniment près, et il s'agit en quelque sorte d'intégrer cette notion de connexion. Contrairement au cas trivial, le transport parallèle peut maintenant dépendre du chemin.

Par définition, $(\nabla_v s)_x$ ne dépend de $v$ qu'au point $x \in M$ mais dépend de $s$ au moins dans un voisinage de $x$. Supposons qu'on a une courbe $\gamma(t) \in M$ telle que $\gamma(0) = x$ et $\dot{\gamma}(t) = v_{\gamma(t)}$. On appelle une telle courbe une ***courbe intégrale***. C'est toujours possible d'en trouver une car, en coordonnées, il s'agit d'une équation différentielle ordinaire du premier ordre. En effet, on a $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ où $v^i$ sont des fonctions et on veut $v^i(\gamma(t)) \frac{\partial}{\partial x^i} = \dot{\gamma}^i(t) \frac{\partial}{\partial x^i}$. Autrement dit, en notant $\gamma(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$, on veut résoudre

$$\begin{aligned} \dot{x}^1(t) &= v^1(x^1(t), \dots, x^n(t)) \\ &\vdots \\ \dot{x}^n(t) &= v^n(x^1(t), \dots, x^n(t)). \end{aligned}$$

Par le théorème fondamental d'existence et d'unicité, il y a une unique solution avec condition initiale $\gamma(0) = x$. On peut voir que $(\nabla_v s)_x$ ne dépend en fait que de $s$ sur la courbe intégrale. En effet,

$$\begin{aligned} (\nabla_v s)_{\gamma(t)} &= v^i \frac{\partial s}{\partial x^i}(\gamma(t)) + A(v)s(\gamma(t)) \\ &= \dot{\gamma}^i(t) \frac{\partial s}{\partial x^i}(\gamma(t)) + A(v)s(\gamma(t)) \\ &= \frac{d}{dt}(s(\gamma(t))) + A(v)s(\gamma(t)). \end{aligned}$$

Il s'ensuit que si $\gamma : I \to M$ est une courbe et $s : I \to E$ est une application lisse telle que $s(t) \in E_{\gamma(t)}$ (une ***section le long de*** $\gamma$) alors on peut définir de manière non ambiguë la dérivée

$$\nabla_{\dot{\gamma}} s : I \longrightarrow E,$$

en tant que section le long de $\gamma$. En coordonnées, on a

$$(\nabla_{\dot{\gamma}} s)_t = \frac{d}{dt}(s(t)) + A(\dot{\gamma}(t))s(t).$$

On dit que $s$ est ***parallèle*** si $\nabla_{\dot{\gamma}} s = 0$.

**Proposition 4.1.** *Soit $\gamma : I \to M$ une courbe lisse et $v \in E_{\gamma(0)}$, il existe une unique section $s : I \to E$ le long de $\gamma$ telle que $s(0) = v$ et $s$ est parallèle.*

*Démonstration.* En coordonnée, on doit résoudre le problème à valeur initiale $\dot{s}(t) + A(\dot{\gamma}(t))s(t) = 0$ avec $s(0) = v$, qui est linéaire, et donc une solution existe sur tout l'intervalle contenu dans la carte. On peut recoller les solutions sur différentes cartes par concaténation. $\square$

On a donc une façon de transporter des vecteurs le long d'une courbe :

$$\gamma : [0,1] \longrightarrow M, \quad P_\gamma : E_{\gamma(0)} \longrightarrow E_{\gamma(1)}, \quad v \longmapsto s(1)$$

où $s : [0,1] \to E$ est l'unique courbe parallèle le long de $\gamma$ avec $s(0) = v$. Il s'ensuit de la linéarité des équations que $P_\gamma$ est linéaire. On peut voir aisément que si $\bar{\gamma} : [0,1] \to M$ est le chemin inverse $\bar{\gamma}(t) = \gamma(1-t)$, alors $P_{\bar{\gamma}}$ est un inverse de $P_\gamma$, donc $P_\gamma$ est inversible.

# 5 Holonomie

Soit $\pi : E \to M$ un fibré vectoriel et $\nabla$ une connexion sur $E$. Pour chaque chemin $\gamma : [0,1] \to M$, le transport parallèle donne une application linéaire inversible $P_\gamma : E_{\gamma(0)} \to E_{\gamma(1)}$. En particulier, on peut considérer des lacets $\gamma : [0,1] \to M$, c'est-à-dire $\gamma(0) = \gamma(1)$. On obtient, pour chaque lacet $\gamma$ à un point $x$ une application inversible $P_\gamma : E_x \to E_x$. En autres mots, après une identification $E_x \cong \mathbb{R}^m$, on a une application

$$\{\text{lacets à } x\} \longrightarrow \mathrm{GL}(m, \mathbb{R}).$$

Le ***groupe d'holonomie*** de la connexion est l'image de cette application

$$\mathrm{Hol}_x(\nabla) = \{P_\gamma : \gamma(0) = \gamma(1) = x\}.$$

On peut voir aisément que $\mathrm{Hol}_x(\nabla)$ est un groupe et si $y \in M$ est un autre point, alors $\mathrm{Hol}_x(\nabla)$ et $\mathrm{Hol}_y(\nabla)$ sont conjugués. En particulier, la classe d'isomorphismes de $\mathrm{Hol}_x(\nabla)$ est bien définie, et on la note simplement $\mathrm{Hol}(\nabla)$. C'est un invariant de la connexion.

La courbure peut être vue comme une manifestation de la dépendance de $P_\gamma$ sur $\gamma$. En effet, soit $u, v \in T_xM$ deux vecteurs. On considère un parallélogramme qui commence à $x$ dans la direction de $u$ et fini à $y$ dans la direction de $-v$, où les côtés sont de longueurs $\varepsilon$ dans un choix de coordonnées. Le transport parallèle donne une application $P_\varepsilon : E \to E$, c'est-à-dire, $P_\varepsilon \in \mathrm{End}(E_x)$. Puisque $P_0 = \mathrm{Id}$, on a une série

$$P_\varepsilon = \mathrm{Id} + \varepsilon L_1 + \varepsilon^2 L_2 + \cdots .$$

Il se trouve que $L_1 = 0$ et $L_2 = \frac{1}{2} F_\nabla(u, v)$ (Exercice (9)), c'est-à-dire

$$P_\varepsilon = \mathrm{Id} + \frac{\varepsilon^2}{2} F_\nabla(u, v) + O(\varepsilon^3).$$

En d'autres termes on retrouve la courbure par la formule

$$F_\nabla(u, v) = \left.\frac{d^2}{d\varepsilon^2}\right|_{\varepsilon=0} P_\varepsilon.$$

En particulier, si le transport parallèle est indépendant de la courbe, alors $F_\nabla = 0$.

Inversement, on peut aussi voir que si $F_\nabla = 0$ alors la connexion est localement triviale, et donc le transport parallèle est inchangé par des perturbations locales de la courbe. En cumulant ces perturbations locales, on obtient :

**Proposition 5.1.** *On a $F_\nabla = 0$ si et seulement si $P_{\gamma_1} = P_{\gamma_2}$ pour toutes courbes homotopes $\gamma_1$ et $\gamma_2$.*

Il s'ensuit que si $F_\nabla = 0$, on a un homomorphisme de groupes

$$\pi_1(M) \longrightarrow \mathrm{GL}(E_{p_0}).$$

En choisissant une identification $E_{p_0} \cong \mathbb{R}^m$, on a une application

$$\rho_E : \pi_1(M) \longrightarrow \mathrm{GL}(m, \mathbb{R}).$$

On a donc une application

$$\rho : \{\text{fibré plat sur } M\} \longrightarrow \{\text{représentation de } \pi_1(M)\}. \tag{5.1}$$

Il est remarquable que, en fait, toutes les représentations de $\pi_1(M)$ puissent être obtenues de la sorte :

**Proposition 5.2.** *Si $M$ est connexe, alors l'application* (5.1) *est surjective.*

*Démonstration.* Soit $M$ une variété lisse et $\rho : \pi_1(M) \to \mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$ une représentation. Nous allons construire un fibré muni d'une connexion induisant la représentation $\rho$. Choisissons un recouvrement de $M$ par des ouverts simplement connexes $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$. Soit $p_0 \in M$ le point définissant $\pi_1(M) = \pi_1(M, p_0)$. Pour chaque $\alpha$, choisissons un point $p_\alpha \in U_\alpha$ et un chemin $\gamma_\alpha : [0,1] \to M$ tel que $\gamma_\alpha(0) = p_0$ et $\gamma_\alpha(1) = p_\alpha$. Pour chaque composante connexe $C$ d'une intersection $U_\alpha \cap U_\gamma$, il existe à homotopie près, un unique chemin $\gamma_C$ reliant $p_\alpha$ et $p_\beta$ passant par la composante connexe $C$. La concatéenation $\gamma_{\alpha\beta} := \gamma_\beta \bar{\gamma}_C \bar{\gamma}_\alpha$ est donc un lacet à $p_0$, définissant un élément de $\pi_1(M)$ et donc, par la représentation, un élément $\rho(\gamma_{\alpha\beta}) \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$. On peut alors définir des cocycles

$$g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \longrightarrow \mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$$

envoyant à chaque composante connexe l'élément de $\mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$ correspondant. Puisque $g_{\alpha\beta}$ est localement constante, il existe une connexion plate en prenant $A^\alpha = 0$ sur chaque trivialisation. Pour voir que l'holonomie de ce fibré plat est $\rho$, on procède comme suit. Soit $\gamma : [0,1] \to M$ un chemin. Puisque $\gamma([0,1])$ est compact, il intersecte un nombre fini d'ouverts $U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_n}$. Le transport parallèle dans une trivialisation fixe $E|_{U_\alpha} = U_\alpha \times \mathbb{R}^m$ est trivial puisque la connexion est triviale. Si $\gamma$ passe par exactement deux ouverts $U_{\alpha_1}$ à $U_{\alpha_2}$, on voit que le transport parallèle est $g_{\alpha_2\alpha_1} = \rho(\gamma_{\alpha_1}\gamma\bar{\gamma}_{\alpha_2})$. Pour trois ouverts on trouve encore $g_{\alpha_3\alpha_2} g_{\alpha_2\alpha_1} = \rho(\gamma_{\alpha_3\alpha_2})\rho(\gamma_{\alpha_2\alpha_1}) = \rho(\gamma_{\alpha_1}\gamma\bar{\gamma}_{\alpha_3})$, etc. On conclu que, en général, le transport parallèle d'un lacet $\gamma$ à $p_0$ est $\rho(\gamma)$. □

**Remarque 5.3.** Le fibré $E$ peut être défini de manière équivalente comme suit. Soit $\tilde{M}$ le revêtement universel. Alors $\pi_1(M)$ agit librement sur $\tilde{M}$ tel que $\tilde{M}/\pi_1(M) \cong M$. Alors $E = (\tilde{M} \times \mathbb{R}^m)/\pi_1(M)$, où $\pi_1(M)$ agit par $\gamma \cdot (p, v) = (\gamma \cdot p, \rho(\gamma)v)$.

On a donc que chaque représentation de $\pi_1(M)$ peut être représenté par un fibré plat. On a donc deux applications

$$\{\text{fibré plat sur } M\} \underset{\varphi}{\overset{\rho}{\rightleftarrows}} \{\text{représentation de } \pi_1(M)\}.$$

telle que $\rho \circ \varphi = \mathrm{Id}$. Ce n'est par contre pas une bijection car si $E$ est un fibré plat, alors $\varphi(\rho(E))$ n'est nécessairement égale à $E$. Ils sont cependant isomorphes, dans le sens suivant.

**Définition 5.4.** Deux fibrés vectoriels $E_1 \to M$ et $E_2 \to M$ sont isomorphe s'il existe un homomorphisme de fibrés vectoriels

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr] & & E_2 \arrow[dl] \\ & M & \end{tikzcd}$$

tel que $F$ se restreint à des applications linéaires inversibles sur chaque fibre.

Dans ce cas, toute connexion sur $E_2$ induit une connexion sur $E_1$. En effet, on a des applications

$$\psi_* : \Gamma(E_1) \longrightarrow \Gamma(E_2), \quad s \longmapsto \psi \circ s$$
$$\psi^* : \Gamma(E_2) \longrightarrow \Gamma(E_1), \quad s \longmapsto \psi^{-1} \circ s.$$

Soit $\nabla$ une connexion sur $E_2$, on défini une connexion sur $E_1$ par

$$(\psi^*\nabla)_v s := \psi^*(\nabla_v \psi_* s).$$

**Définition 5.5.** On dit que deux fibrés plats $(E_1, \nabla^1)$ et $(E_2, \nabla^2)$ sont ***isomorphes*** s'il existe un isomorphisme $\psi$ tel que $\nabla^1 = \psi^*\nabla^2$.

Notons que $\rho_E : \pi_1(M) \to \mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$ n'est déterminé qu'à une conjugation près. En effet, une autre identification $E_{p_0} \cong \mathbb{R}^m$ donne $\rho'_E = A\rho_E A^{-1}$, où $A \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$. Soit l'action de $\mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$ sur $\mathrm{Hom}(\pi_1(M), \mathrm{GL}(m, \mathbb{R}))$ on a donc une application bien définie

$$\{\text{fibré plat sur } M\} \xrightarrow{\rho} \mathrm{Hom}(\pi_1(M), \mathrm{GL}(m, \mathbb{R}))/\mathrm{GL}(m, \mathbb{R}).$$

On a montré que cette application est surjective.

Maintenant, deux fibrés plats isomorphes n'ont pas nécessairement la même holonomie, mais ils ont des holonomies conjuguées. En effet, si $\gamma$ est un chemin sur $M$ et $s$ est une section de $F$ parallèle le long de $\gamma$, i.e. $\nabla^F_{\dot{\gamma}} s = 0$, alors $\nabla^E_{\dot{\gamma}} \psi^* s = \psi^* \nabla^F_{\dot{\gamma}} s = 0$, donc $\psi^* s$ est parallèle le long de $\gamma$. Il s'ensuit que $P^E_\gamma = \psi^{-1}_{\gamma(1)} \circ P^F_\gamma \circ \psi_{\gamma(0)}$. En particulier, si $\gamma$ est un lacet à $p_0$, alors $\rho^E(\gamma) = \psi_{p_0} \circ \rho^F(\gamma) \circ \psi_{p_0}$. En choisissant des identifications $E_{p_0} = \mathbb{R}^m$ et $F_{p_0} = \mathbb{R}^m$, on voit que les holonomies sont conjuguées. On conclut :

**Théorème 5.6.** *Soit $M$ une variété lisse connexe. Alors, il y a une bijection*

$$\{\text{fibrés plats de rang } m \text{ sur } M\}/\text{isomorphismes} \cong \operatorname{Hom}(\pi_1(M), \operatorname{GL}(m,\mathbb{R}))/\operatorname{GL}(m,\mathbb{R}).$$

# Exercices sur les connexions – Cours 1

## Quelques définitions

- Soit $\pi : E \to M$ un fibré vectoriel. Une ***section lisse*** est une application lisse $\sigma : M \to E$ telle que $\pi \circ \sigma = \mathrm{Id}_M$. L'ensemble des sections lisses est noté $\Gamma(E)$.
- Une ***connexion*** sur un fibré vectoriel $\pi : E \to M$ est une application

$$\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E)$$

  telle que
  (1) (Linéarité en $v$.) On a $\nabla_{fv}\sigma = f\nabla_v\sigma$ et $\nabla_{u+v}\sigma = \nabla_u\sigma + \nabla_v\sigma$ pour toute fonction $f \in C^\infty(M)$, tous champs de vecteurs $u, v \in \Gamma(TM)$, et toute section $\sigma \in \Gamma(E)$.
  (2) (Règle de Leibniz.) On a $\nabla_v f\sigma = (vf)\sigma + f\nabla_v\sigma$ et $\nabla_v(\sigma + \tau) = \nabla_v\sigma + \nabla_v\tau$, pour toute fonction $f \in C^\infty(M)$, tout champ de vecteurs $v \in \Gamma(TM)$, et toutes sections $\sigma, \tau \in \Gamma(E)$.

## Exercices

(1) Soit $E = M \times \mathbb{R}^m$ un fibré vectoriel trivial sur une variété lisse $M$.
  (a) Montrer qu'il y a une bijection entre les sections $s \in \Gamma(E)$ et les fonctions lisses $f : M \to \mathbb{R}^m$.
  (b) Soit $A : TM \to \mathrm{M}_m(\mathbb{R})$ une 1-forme à valeurs dans les matrices réelles $m \times m$. Montrer que, selon l'identification en (a), $\nabla = d + A$ est une connexion sur $E$, où

$$\nabla_v f \coloneqq df(v) + A(v)f$$

  pour toute fonction $f : M \to \mathbb{R}^m$ et tout champ de vecteurs $v \in \Gamma(TM)$.
  (c) Inversement, montrer que toute connexion sur $E$ est de la forme donnée en (b).

(2) Soit $E \to M$ un fibré vectoriel défini par des cocycles $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$. Soit $A^\alpha : TU_\alpha \to \mathrm{M}_m(\mathbb{R})$ des 1-formes à valeurs dans les matrices $m \times m$. Montrer que les connexions locales $\nabla^\alpha = d + A^\alpha$ sur $E|_{U_\alpha} = U_\alpha \times \mathbb{R}^m$ se recollent à une connexion globale sur $E$ si et seulement si

$$A^\beta = g_{\alpha\beta}^{-1} A^\alpha g_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta}^{-1} dg_{\alpha\beta}$$

pour tout $\alpha$ et $\beta$.

(3) Soient $M = S^2$, $U_\alpha = S^2 \setminus \{N\}$, et $U_\beta = S^2 \setminus \{S\}$. Soit $(u, v)$ et $(\tilde{u}, \tilde{v})$ les coordonnées sur $U_1$ et $U_2$, respectivement, obtenues par projection stéréographique. Soit $E \to S^2$ le fibré vectoriel défini par la fonction de transition

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow \mathrm{GL}(2, \mathbb{R}), \quad g_{\alpha\beta}(u, v) = \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}} \begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix}.$$

Soit

$$A^\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \frac{udv - vdu}{1+u^2+v^2} \\ \frac{vdu - udv}{1+u^2+v^2} & 0 \end{pmatrix} : TU_\alpha \to \mathrm{M}_2(\mathbb{R}).$$

Montrer qu'il existe $A^\beta : TU_\beta \to \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ tel que $A^\alpha$ et $A^\beta$ forment une connexion sur $E$ (voir Question (2)).

(4) Calculer la courbure de la connexion définie à la question (3).

(5) Soit $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. La bouteille de Klein peut être définie par le quotient

$$M = ((-\pi, \pi) \times S^1 \sqcup (0, 2\pi) \times S^1)/\!\sim$$

où $(\theta, z) \in (-\pi, \pi) \times S^1$ est équivalent à $(\theta, z) \in (0, 2\pi) \times S^1$ quand $\theta \in (0, \pi)$, et $(\theta, z) \in (-\pi, \pi) \times S^1$ est équivalent à $(\theta + 2\pi, -z) \in (0, 2\pi) \times S^1$ quand $\theta \in (-\pi, 0)$. On considère la normale de la bouteille de Klein, qui est un fibré en droites

$$E = (((-\pi, \pi) \times S^1 \times \mathbb{R}) \sqcup ((0, 2\pi) \times S^1 \times \mathbb{R}))/\!\sim$$

où $(\theta, z, r) \in (-\pi, \pi) \times S^1 \times \mathbb{R} \sim (\theta, z, r) \in (0, 2\pi) \times S^1 \times \mathbb{R}$ quand $\theta \in (0, \pi)$, et $(\theta, z, r) \in (-\pi, \pi) \times S^1 \times \mathbb{R} \sim (\theta + 2\pi, -z, -r) \in (0, 2\pi) \times S^1 \times \mathbb{R}$ quand $\theta \in (-\pi, 0)$. Trouver toutes les connexions sur $E$.

(6) Soit $M \subseteq \mathbb{R}^n$ une variété lisse et $TM \subseteq M \times \mathbb{R}^n$ son fibré tangent. Chaque section $s : M \to TM$ peut alors être vue comme une section du fibré trivial $M \times \mathbb{R}^n \to M$. Soit $\nabla^{\text{can}}$ la connexion triviale sur $M \times \mathbb{R}^n \to M$. On peut définir une connexion $\nabla$ sur $TM$ par $\nabla_v s = \text{pr}_{TM}(\nabla_v^{\text{can}} s)$ où $\text{pr}_{TM}$ est la projection orthogonale $M \times \mathbb{R}^n \to TM$. Montrer que $\nabla$ est une connexion.

(7) Soit $\pi : E \to M$ un fibré vectoriel et $\{U_\alpha\}_\alpha$ un recouvrement de $M$ par des ouverts tels que $E|_{U_\alpha}$ admette une connexion $\nabla^\alpha$ pour tout $\alpha$. Soit $\psi_\alpha$ une partition de l'unité subordonnée à $\{U_\alpha\}_\alpha$. Montrer que

$$\nabla_v s \coloneqq \sum_\alpha \nabla^\alpha_{v|_{U_\alpha}}(\psi_\alpha s)$$

défini une connexion sur $E$. Déduire que tout fibré vectoriel admet une connexion.

(8) Soit $E \to M$ un fibré vectoriel muni d'une connexion $\nabla$. Soit $\phi : E|_U \to U \times \mathbb{R}^m$ une trivialisation et $\nabla = d + A$ la connexion exprimée dans cette trivialisation. Montrer que la courbure locale $F_{ij} dx^i \wedge dx^j$, où $F_{ij} = \frac{\partial A_j}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^j} + [A_i, A_j]$ et $A_i = A(\frac{\partial}{\partial x^i})$ peut être écrite indépendamment du choix de trivialisation comme un élément $F \in \Omega^2_M(\operatorname{End} E)$ défini par

$$F(u, v)s = \nabla_u \nabla_v s - \nabla_v \nabla_u s - \nabla_{[u,v]} s$$

où $[u, v]$ est le crochet de Lie.

(9) Le théorème de Frobenius stipule que si $M$ est une variété différentiable et $D \subseteq TM$ est une distribution involutive (un sous-fibré de $TM$ tel que si $u, v : M \to D$ sont deux sections de $D$ alors $[u, v]$ est aussi une section de $D$) alors pour chaque point $p \in M$ il existe une sous-variété $S \subseteq M$ telle que $p \in S$ et $T_q S = D_q$ pour chaque $q \in S$. Dans la même notation que la question (8), utiliser le théorème de Frobenius pour montrer que si $F_{ij} = 0$ pour tout $i, j$, alors pour chaque $p \in U$ il existe un voisinage $V$ de $p$ et des sections $e_1, \ldots, e_m : V \to E$ linéairement indépendentes en chaque point, telles que $\nabla e_i = 0$. Déduire qu'il existe une trivialisation près de $p$ telle que la connexion est triviale. (Indice : Soit $(x^1, \ldots, x^n, v_1, \ldots, v_m)$ des coordonnées sur $U \times \mathbb{R}^m \cong E|_U$, où $(v_1, \ldots, v_m)$ sont les coordonnées canoniques sur $\mathbb{R}^m$, considérer les champs de vecteurs $V_i \coloneqq \frac{\partial}{\partial x^i} + A^k_{ij} v_k \frac{\partial}{\partial v_j}$, où $A^k_{ij}$ sont les composantes de la matrice $A_i$.)

# Exercices sur les connexions – Cours 2

(1) Soit $E = S^1 \times \mathbb{R} \to S^1$ le fibré vectoriel trivial de rang 1 sur le cercle. Soit $a : S^1 \to \mathbb{R}$ une fonction lisse et soit $\nabla = d + a d\theta$ la connexion sur $E$ donnée par la 1-forme $A = a d\theta : TS^1 \to \mathrm{M}_1(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, où $\theta$ est la coordonnée sur $S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$ donnée par l'angle d'un point $(x, y) \in S^1$.

  (a) Calculer le transport parallèle le long du lacet $\gamma : [0,1] \to S^1$, $\gamma(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$.

  (b) Calculer le groupe d'holonomie de la connexion.

(2) Montrer que pour toute connexion sur le fibré trivial de rang 1 sur $\mathbb{R}^2$, son groupe d'holonomie est contenu dans $(0, \infty) \subseteq \mathrm{GL}(1, \mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une connexion sur ce fibré telle que son holonomie est égale à $(0, \infty)$.

(3) Le ruban de Möbius peut être décrit comme

$$E = ((-\pi, \pi) \times \mathbb{R} \sqcup (0, 2\pi) \times \mathbb{R})/\sim$$

où

$$\begin{aligned} (\theta, x) \in (-\pi, \pi) \times \mathbb{R} &\sim (\theta, x) \in (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \quad \text{si } \theta \in (0, \pi) \\ (\theta, x) \in (-\pi, \pi) \times \mathbb{R} &\sim (\theta + 2\pi, -x) \in (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \quad \text{si } \theta \in (-\pi, 0). \end{aligned}$$

En d'autres termes, on a un recouvrement $S^1 = U_\alpha \cup U_\beta$ où

$$U_\alpha = \{(\cos\theta, \sin\theta) : \theta \in (-\pi, \pi)\} \quad \text{et} \quad U_\beta = \{(\cos\theta, \sin\theta) : \theta \in (0, 2\pi)\},$$

et $E$ est défini par le cocycle

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow \mathrm{GL}(1, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^\times, \quad g_{\alpha\beta}(\cos\theta, \sin\theta) = \begin{cases} 1 & \text{si } \theta \in (0, \pi) \\ -1 & \text{si } \theta \in (-\pi, 0). \end{cases}$$

  (a) Montrer qu'une section de $E$ est équivalente à une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$f(\theta + 2\pi) = -f(\theta), \quad \text{pour tout } \theta \in \mathbb{R}. \tag{5.2}$$

  (b) Montrer qu'une connexion sur $E$ est équivalente à une fonction $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $a(\theta+2\pi) = a(\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, où la connexion agit sur une fonction satisfaisant (5.2) par

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial\theta}} f = \frac{\partial f}{\partial\theta} + af.$$

  (c) Soit $\gamma : [0,1] \to S^1$, $\gamma(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$. Calculer le transport parallèle $P_\gamma$ de la connexion en (b) en fonction de $a$.

  (d) Calculer le groupe d'holonomie de la connexion en (b).

(4) Soit $E \to M$ un fibré vectoriel muni d'une connexion $\nabla$. Soit $\gamma : [0,1] \to M$ une courbe lisse. Montrer que pour tout $v \in E_{\gamma(0)}$ il existe une unique section $s : [0,1] \to E$ le long de $\gamma$ telle que $s(0) = v$ et $s$ est parallèle, c'est-à-dire $\nabla_{\dot\gamma(t)} s = 0$.

(5) Montrer que le transport parallèle

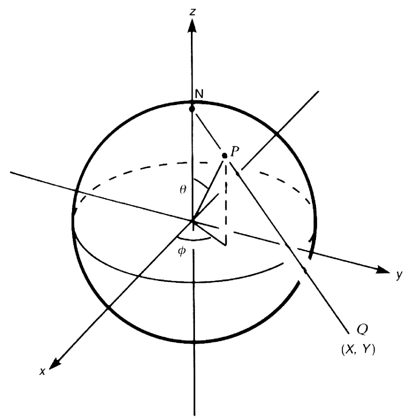
$$P_\gamma : E_{\gamma(0)} \longrightarrow E_{\gamma(1)}$$

est une application linéaire.

(6) Soit $\gamma : [0,1] \to M$ un chemin lisse et $\bar\gamma : [0,1] \to M$, $\bar\gamma(t) \coloneqq \gamma(1-t)$ le chemin inverse. Montrer que $P_{\bar\gamma} \circ P_\gamma = \mathrm{Id}_{E_{\gamma(0)}}$ et $P_\gamma \circ P_{\bar\gamma} = \mathrm{Id}_{E_{\gamma(1)}}$.

(7) Soit $\pi : E \to M$ un fibré vectoriel muni d'une connexion $\nabla$ telle que $F_\nabla = 0$. Montrer que pour tout $p \in M$, l'application $\pi(M, p) \to \mathrm{GL}(E_p)$ est un homomorphisme de groupes.

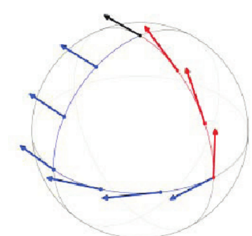
(8) Soit $(\theta, \phi)$ les coordonnées polaires comme sur la figure suivante.




On identifie $TS^2$ avec un sous fibré de $S^2 \times \mathbb{R}^3$, c'est-à-dire, $TS^2 = \{(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{x}\| = 1, \mathbf{x} \cdot \mathbf{v} = 0\}$. Soit $\nabla$ la connexion sur $TS^2$ obtenue telle que dans la question (6) du cours 1. Montrer que le transport parallèle le long du quart d'équateur $\gamma : [0, 1] \to S^2$, $\gamma(t) = (\theta(t), \phi(t)) = (\pi, \frac{\pi}{2}t)$ est donné par

$$\begin{aligned} T_{(1,0,0)}S^2 = \{(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 : v_1 = 0\} &\longrightarrow T_{(0,1,0)}S^2 = \{(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 : v_2 = 0\} \\ (0, u, v) &\longmapsto (u, 0, v). \end{aligned}$$

Déduire, par symétrie, que le transport parallèle le long de la courbe suivante est une rotation de 90°.



(9) Soit $\pi : E \to M$ un fibré vectoriel et $\nabla$ une connexion sur $E$. Soit $u, v \in T_pM$ et $P_\varepsilon \in \mathrm{End}(E_p)$ le transport parallèle le long d'un parallélogramme sur $M$ partant à $p$ dans la direction de $u$ et revenant à $p$ dans la direction de $-v$. Montrer que la courbure est donnée par

$$F_\nabla(u, v) := \left.\frac{d^2}{d\varepsilon^2}\right|_{\varepsilon=0} P_\varepsilon \in \mathrm{End}(E_p).$$

## Références


[1] S. K. Donaldson and P. B. Kronheimer. *The geometry of four-manifolds.* Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1990. Oxford Science Publications.

[2] Shoshichi Kobayashi and Katsumi Nomizu. *Foundations of differential geometry. Vol. I.* Wiley Classics Library. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1996. Reprint of the 1963 original, A Wiley-Interscience Publication.

[3] Mikio Nakahara. *Geometry, topology and physics.* Graduate Student Series in Physics. Institute of Physics, Bristol, second edition, 2003.

[4] Clifford Henry Taubes. *Differential geometry*, volume 23 of *Oxford Graduate Texts in Mathematics.* Oxford University Press, Oxford, 2011. Bundles, connections, metrics and curvature.