

Le fibré de Hopf

Maxence Mayrand
Département de mathématiques
Université de Sherbrooke

19 juin 2023

Dans ces notes, nous expliquerons comment définir et visualiser le fibré de Hopf, et décrirons quelques unes de ses propriétés remarquables.

Avant toute chose, rappelons qu'un **fibré** (pas nécessairement vectoriel) consiste en trois espaces topologiques E (l'espace total), B (la base) et F (la fibre), et une application continue et surjective

$$\pi : E \longrightarrow B$$

satisfaisant la condition d'être **localement trivial**, c'est-à-dire : il existe un recouvrement U_α de B et des homéomorphismes $\Phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times F$ tels que le diagramme suivant est commutatif pour tout α :

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_\alpha) & \xrightarrow{\Phi_\alpha} & U_\alpha \times F \\ \searrow \pi & & \swarrow \text{proj} \\ & & U_\alpha \end{array}$$

Autrement dit, c'est un espace topologique qui est localement comme un produit cartésien $U_\alpha \times F$, mais qui n'est pas nécessairement homéomorphe à un produit cartésien $B \times F$ globalement. Le ruban de Möbius sur S^1 est un exemple de fibré non trivial, c'est-à-dire qui n'est pas globalement un produit cartésien.

Pour définir le fibré de Hopf, nous devons d'abord définir la n -sphère, soit l'ensemble

$$S^n := \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}.$$

En particulier, S^2 est la sphère usuelle de rayon un dans \mathbb{R}^3 , S^1 est le cercle unitaire dans \mathbb{R}^2 , et S^0 consiste en deux points distincts $\{\pm 1\} \subseteq \mathbb{R}$. La n -sphère est une variété lisse de dimension n , ce que nous verrons un peu plus loin à l'aide des projections stéréographiques.

Le fibré de Hopf est un fibré de la forme

$$h : S^3 \longrightarrow S^2$$

dont les fibres sont des cercles S^1 . Pour le définir, remarquons d'abord les faits suivants. Il est clair visuellement qu'un plan dans \mathbb{R}^3 (c'est-à-dire un sous-espace vectoriel de dimension 2) intersecte la sphère en un cercle. De même, une droite dans \mathbb{R}^3 passant par l'origine intersecte S^2 en deux points distincts, c'est-à-dire en une 0-sphère S^0 . Plus généralement, un sous-espace $V \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ de dimension m intersecte la n -sphère S^n en un sous-espace naturellement difféomorphe à la $(m-1)$ -sphère :

$$S^n \cap V \cong S^{m-1} \quad \text{si } \dim V = m.$$

En particulier, les plans dans \mathbb{R}^{n+1} recoupent la n -sphère en des cercles. En général, deux de ces cercles ont une intersection non triviale, comme on peut le voir pour la sphère S^2 . Cependant, une structure particulière apparaît en dimension 4 (ou plus généralement en dimension paire). En effet, l'espace \mathbb{R}^4 peut être vu comme \mathbb{C}^2 et on a une certaine sous-famille de plans : les sous-espaces complexes de dimension complexe 1, noté

$$\mathbb{C}\mathbb{P}^1 := \{V \subseteq \mathbb{C}^2 : V \text{ est un sous-espace vectoriel complexe et } \dim_{\mathbb{C}} V = 1\}.$$

Chaque espace $V \in \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ est aussi un espace vectoriel de dimension réelle 2, donc $S^3 \cap V \cong S^1$. Notons que deux espaces vectoriels de dimension 1 sont identiques si et seulement si ils ont une intersection non triviale. On a alors le fait remarquable que pour tout $V_1, V_2 \in \mathbb{C}\mathbb{P}^1$,

les cercles $S^3 \cap V_1 \cong S^1$ et $S^3 \cap V_2 \cong S^1$ dans S^3 sont soit identiques, soit disjoints.

En autres termes, S^3 est une union disjointe de cercles, c'est-à-dire que S^3 est fibré par des cercles :

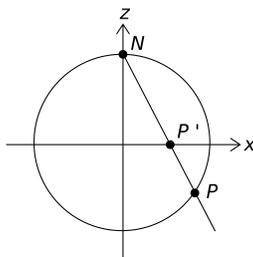
$$S^3 = \bigcup_{V \in \mathbb{C}\mathbb{P}^1} (S^3 \cap V).$$

On a donc une application surjective

$$h : S^3 \longrightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1,$$

dont les fibres sont des cercles. Pour compléter la définition, il suffit de montrer que $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ est difféomorphe à S^2 , et que h est localement trivial. Pour ce faire, il est utile de rappeler la notion de projection stéréographique. Ce sera aussi utile pour visualiser le fibré de Hopf.

remièrement, le cercle S^1 admet une projection stéréographique. Soit $N = (0, 1) \in S^1$ le pôle Nord, pour chaque point $(x, y) \in S^2 \setminus \{N\}$, il y a une unique droite passant par N et (x, y) . Cette droite intersecte l'axe des x en un point, définissant une bijection $S^1 \setminus \{N\} \cong \mathbb{R}$.



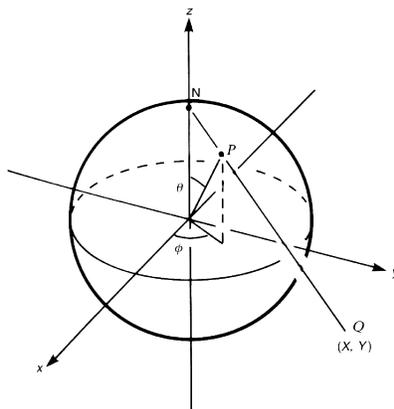
En particulier, on voit que S^1 peut être vu comme $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ où ∞ est un point additionnel représentant le pôle Nord. Explicitement, la bijection est donnée par

$$S^2 \setminus \{N\} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \longmapsto \frac{x}{1-y}$$

et son inverse par

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow S^2 \setminus \{N\}, \quad u \longmapsto \left(\frac{2u}{u^2+1}, \frac{u^2-1}{u^2+1} \right).$$

De même, si $N = (0, 0, 1)$ est le pôle Nord de la 2-sphère S^2 , l'unique droite passant par N et un point dans $S^2 \setminus \{N\}$ définit une bijection $S^2 \setminus \{N\} \cong \mathbb{R}^2$.



Explicitement, on a

$$S^2 \setminus \{N\} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y, z) \longmapsto \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right)$$

et son inverse est

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow S^2 \setminus \{N\}, \quad (u, v) \longmapsto \left(\frac{2u}{u^2+v^2+1}, \frac{2v}{u^2+v^2+1}, \frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1} \right).$$

On a alors que S^2 peut être vue comme $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$.

De même, la 3-sphère admet une projection stéréographique par le point $N = (0, \dots, 0, 1)$, donnée par

$$S^3 \setminus \{N\} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z, w) \longmapsto \left(\frac{x}{1-w}, \frac{y}{1-w}, \frac{z}{1-w} \right)$$

et son inverse par

$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow S^3 \setminus \{N\}, \quad (x, y, z) \longmapsto \left(\frac{2x}{x^2+y^2+z^2+1}, \frac{2y}{x^2+y^2+z^2+1}, \frac{2z}{x^2+y^2+z^2+1}, \frac{x^2+y^2+z^2-1}{x^2+y^2+z^2+1} \right).$$

On visualise alors la 3-sphère comme l'espace \mathbb{R}^3 muni d'un point additionnel à l'infini.

Le concept de projection stéréographique peut aisément se généraliser à la n -sphère. De plus, en faisant aussi la projection stéréographique par le pôle Sud, on obtient un recouvrement de S^n par deux cartes locales, donc la fonction de transition est lisse, ce qui démontre que S^n est une variété lisse.

Revenons maintenant à notre but : montrer que \mathbb{CP}^1 est diffeomorphe à S^2 . Chaque élément de \mathbb{CP}^1 peut être écrit comme $\text{Vect}_{\mathbb{C}}(u, v) = \{(cu, cv) : c \in \mathbb{C}\}$, où $(u, v) \in \mathbb{C}^2$ et $(u, v) \neq (0, 0)$. La notation conventionnelle pour cet espace, est

$$[u : v] := \text{Vect}_{\mathbb{C}}(u, v).$$

On a alors

$$\mathbb{CP}^1 = \{[u : v] : (u, v) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}\}$$

et deux vecteurs $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in \mathbb{C}^2$ représentent le même point dans \mathbb{CP}^1 si et seulement si $(u_1, v_1) = c(u_2, v_2)$ pour $c \in \mathbb{C}$. On a deux ouverts particuliers dans \mathbb{CP}^1 :

$$U_1 = \mathbb{CP}^1 \setminus \{[0 : 1]\} = \{[u : v] \in \mathbb{CP}^1 : u \neq 0\}$$

$$U_2 = \mathbb{CP}^1 \setminus \{[1 : 0]\} = \{[u : v] \in \mathbb{CP}^1 : v \neq 0\}.$$

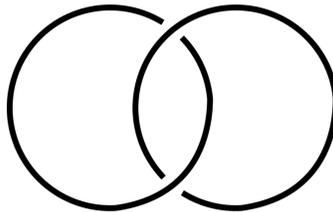
Notons que $\mathbb{CP}^1 = U_1 \cup U_2$. Pour $[u : v] \in U_1$, on a $[u : v] = [\frac{u}{u} : \frac{v}{u}] = [1 : z]$, où $z \in \mathbb{C}$. Il s'ensuit que $U_1 \cong \mathbb{C}$ via $[u : v] \mapsto \frac{v}{u}$ et son inverse $z \mapsto [1 : z]$. On a alors $\mathbb{CP}^1 = U_1 \cup \{[0 : 1]\} \cong \mathbb{R}^2 \cup \{[0 : 1]\}$. De même, on a $\mathbb{CP}^1 = U_2 \cup \{[1 : 0]\} \cong \mathbb{R}^2 \cup \{[1 : 0]\}$. Ces deux faits impliquent que $\mathbb{CP}^1 \cong S^2$.

On a alors une application surjective

$$h : S^3 \longrightarrow S^2$$

dont les fibres sont S^1 . La démonstration que h est localement trivial est un exercice important, qui est donné comme un exercice guidé plus bas (Exercice (1)).

En visualisant S^3 comme $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$, on peut se demander à quoi ressemblent les cercles. Une propriété remarquable est que tous ces cercles sont entrelacés :



Pour montrer cette propriété, il est utile d'exploiter une certaine symétrie du fibré. Soit

$$\mathrm{SU}(2) = \{A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}) : AA^* = I\},$$

où $A^* := \overline{A}^t$ est le conjugué de la matrice transposée de A . On a alors que $\mathrm{SU}(2)$ agit sur \mathbb{C}^2 tout en préservant la 3-sphère $S^3 \subseteq \mathbb{C}^2$. De même, l'action de $\mathrm{SU}(2)$ sur \mathbb{C}^2 descend à une action sur \mathbb{CP}^1 telle que l'application $h : S^3 \rightarrow \mathbb{CP}^1$ est équivariante. C'est-à-dire, pour tout $A \in \mathrm{SU}(2)$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} S^3 & \xrightarrow{A} & S^3 \\ \downarrow h & & \downarrow h \\ S^2 & \xrightarrow{A} & S^2 \end{array}$$

commute. De plus, l'action de $\mathrm{SU}(2)$ sur \mathbb{CP}^1 est transitive, c'est-à-dire, pour tout $[u : v] \in \mathbb{CP}^1$, il existe $A \in \mathrm{SU}(2)$ tel que $A[u : v] = [1 : 0]$. Pour montrer que chaque paire de fibres consiste en des cercles entrelacés, il suffit alors de considérer la fibre au-dessus de $[1 : 0]$ et une autre fibre arbitraire.

En utilisant la projection stéréographique par $(0, 0, 1)$ pour identifier S^3 avec $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$, on peut voir que la fibre $h^{-1}([1 : 0])$ est le cercle unitaire dans le plan xy . De même, la fibre $h^{-1}([0 : 1])$ est l'axe des z plus le point à l'infini (Exercice (4)). Ces deux fibres sont donc entrelacées, et il suffit de montrer que toute fibre de la forme $h^{-1}([1 : z])$ pour $z \in \mathbb{C}$ est entrelacée avec la fibre $h^{-1}([0 : 1])$. Puisque $h^{-1}([0 : 1])$ est le cercle unitaire sur le plan xy , il suffit de montrer que $h^{-1}([1 : z])$ intersecte le plan xy en exactement deux points, dont un à l'intérieure du cercle unitaire, et l'autre à l'extérieure. Ceci peut être montré explicitement à l'aide des formules ci-haut, et est laissé en exercice (Exercice (5)).

Notons que le fibré $h : S^3 \rightarrow S^2$ n'est pas isomorphe au fibré trivial $S^2 \times S^1 \rightarrow S^2$, car S^3 et $S^2 \times S^1$ ne sont pas homéomorphes. Par exemple, ceci peut être vu par le fait que $\pi_1(S^3) = 1$ et $\pi_1(S^2 \times S^1) = \mathbb{Z}$. Trois autres démonstrations de la non-trivialité de h seront présentées en exercices (Exercice (7)).

En topologie, une des propriétés fondamentales du fibré de Hopf est qu'il montre que le troisième groupe d'homotopie $\pi_3(S^2)$ de la 2-sphère est non trivial. Rappelons que le groupe d'homotopie $\pi_i(X)$ d'un espace topologique X est une généralisation du groupe fondamental. Pour définir le groupe fondamental $\pi_1(X)$, on choisit un point $x_0 \in X$ et $y_0 \in S^1$ et on considère l'ensemble des applications continues $f : S^1 \rightarrow X$ telles que $f(y_0) = x_0$ modulo la relation d'équivalence que $f_0 \sim f_1$ s'ils sont homotopes par une homotopie f_t qui garde la propriété que $f_t(y_0) = x_0$. De même, $\pi_i(X)$ est l'ensemble des applications continues $f : S^i \rightarrow X$ telles que $f(y_0) = x_0$ modulo les homotopies envoyant y_0 à x_0 . Il est surprenant que, contrairement aux groupes d'homologie, $\pi_i(X)$ puisse être non trivial pour $i > \dim X$. Le premier exemple est le fibré de Hopf, $h : S^3 \rightarrow S^2$, qui ne peut pas être déformé à une application constante $S^3 \rightarrow S^2$, ce qui montre que $\pi_3(S^2)$ n'est pas trivial. L'étude des groupes d'homotopie $\pi_i(S^n)$ des n -sphères pour $i > n$ est un sujet de recherche actuel, qui comporte encore de nombreux mystères.

Il est possible de généraliser le fibré de Hopf $S^3 \subseteq \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{CP}^1$ en remplaçant les nombres complexes \mathbb{C} par les quaternions \mathbb{H} . On obtient un fibré de la forme $S^7 \subseteq \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{HP}^1 \cong S^4$ dont les fibres sont des 3-sphères. Tout comme le fibré de Hopf, il donne un élément non trivial de $\pi_7(S^4)$. De même, en utilisant les octonions \mathbb{O} , on obtient un fibré $S^{15} \rightarrow S^8$ dont les fibres sont S^7 , produisant un élément non trivial de $\pi_{15}(S^8)$. Dans l'autre direction, on peut remplacer \mathbb{C} par \mathbb{R} pour obtenir un fibré $S^1 \rightarrow S^1$ dont les fibres sont des S^0 . On a donc quatre fibrés non triviaux :

$$\begin{aligned} S^0 &\hookrightarrow S^1 \rightarrow S^1 \\ S^1 &\hookrightarrow S^3 \rightarrow S^2 \\ S^3 &\hookrightarrow S^7 \rightarrow S^4 \\ S^7 &\hookrightarrow S^{15} \rightarrow S^8. \end{aligned}$$

Il n'est pas possible de continuer, car $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$, et \mathbb{O} sont les seules algèbres de division normées sur les nombres réels, ce qui est essentiel pour la construction de ces fibrés. C'est-à-dire, il n'y a pas d'autres algèbres réelles univales telles que $ab = 0 \implies a = 0$ ou $b = 0$ et munies d'une norme $\|\cdot\|$ telle que $\|ab\| = \|a\|\|b\|$.

Exercices sur le fibré de Hopf

- (1) Montrer que le fibré de Hopf est localement trivial en suivant les étapes suivantes.
- (a) Soit $[1 : z] \in \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ où $z \in \mathbb{C}$. Montrer que chaque point dans la fibre au-dessus de $[1 : z]$ est de la forme (u, uz) où $u \in \mathbb{C}$ satisfait $|u|^2 = \frac{1}{1+|z|^2}$.
- (b) Soit $U_1 = \{[u : v] \in \mathbb{C}\mathbb{P}^1 : u \neq 0\}$. Trouver un homéomorphisme

$$U_1 \times S^1 \longrightarrow h^{-1}(U_1),$$

où $h : S^3 \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ est le fibré de Hopf.

- (c) Trouver l'inverse de l'homéomorphisme en (b) et montrer qu'il satisfait les conditions d'une trivialisatation locale.
- (d) Répéter (a), (b) et (c) avec $[z : 1]$ et $U_2 = \{[u : v] \in \mathbb{C}\mathbb{P}^1 : v \neq 0\}$.
- (2) Soit $V \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ un sous-espace vectoriel de dimension m . Montrer que $S^n \cap V \cong S^{m-1}$.
- (3) (a) Montrer que la projection stéréographique de S^1 sur \mathbb{R} par le pôle Nord est donnée par

$$(x, y) \longmapsto \frac{x}{1-y}$$

et son inverse par

$$r \longmapsto \left(\frac{2r}{r^2+1}, \frac{r^2-1}{r^2+1} \right).$$

- (b) Montrer que la projection stéréographique de S^2 sur \mathbb{R}^2 par le pôle Nord est donnée par

$$(x, y, z) \longmapsto \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right)$$

et son inverse par

$$(u, v) \longmapsto \left(\frac{2u}{u^2+v^2+1}, \frac{2v}{u^2+v^2+1}, \frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1} \right).$$

- (c) Montrer que la projection stéréographique de S^n sur \mathbb{R}^n par le point $(0, 0, \dots, 0, 1)$ est donnée par

$$(x_1, \dots, x_{n+1}) \longmapsto \left(\frac{x_1}{1-x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1-x_{n+1}} \right)$$

et son inverse par

$$u = (u_1, \dots, u_n) \longmapsto \left(\frac{2u_1}{\|u\|^2+1}, \dots, \frac{2u_n}{\|u\|^2+1}, \frac{\|u\|^2-1}{\|u\|^2+1} \right).$$

- (4) Montrer que, en utilisant la projection stéréographique par $(0, 0, 1)$ pour identifier S^3 avec $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$, la fibre $h^{-1}(S)$ au-dessus du pôle Sud est le cercle unitaire dans le plan xy , et la fibre $h^{-1}(N)$ au-dessus du pôle Nord est l'axe des z plus le point à l'infini.
- (5) (a) On a vu que la fibre $h^{-1}(S)$ au-dessus du pôle Sud est le cercle unitaire dans le plan xy . Montrer que la fibre au-dessus de tout point de S^2 autre que le pôle Nord ou Sud est entrelacée avec $h^{-1}(S)$ en montrant qu'elle intersecte le plan xy en exactement deux points, dont un à l'intérieur du cercle unitaire et un à l'extérieur.

[Indices : Utiliser la formulation $S^3 \subseteq \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$. Montrer que les fibres en question sont de la forme $\{(z\lambda, w\lambda) : \lambda \in S^1\}$ où $(z, w) \in S^3$ et $z, w \neq 0$. Montrer que la fibre intersecte le plan xy si et seulement si $\operatorname{Re}(w\lambda) = 0$. Montrer qu'on a exactement deux solutions : $\lambda = \pm i \frac{\bar{w}}{|w|}$. Montrer que les points du plan xy correspondant sont $\frac{iz\bar{w}}{|w|(1-|w|)}$ et $\frac{-iz\bar{w}}{|w|(1+|w|)}$ et montrer qu'ils sont de norme > 1 et < 1 .]

- (b) Utiliser la symétrie $SU(2)$ du fibré de Hopf pour montrer que toutes les fibres sont entrelacées.

- (6) (a) Montrer que $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ est difféomorphe au quotient $(\mathbb{C} \sqcup \mathbb{C})/\sim$ où z dans la première copie de \mathbb{C} est équivalent à \tilde{z} dans la deuxième copie de \mathbb{C} si et seulement si $z = \frac{1}{\tilde{z}}$.
- (b) Montrer que le fibré de Hopf est $((\mathbb{C} \times S^1) \sqcup (\mathbb{C} \times S^1))/\sim$ où $(z, w) \sim (\tilde{z}, \tilde{w})$ si et seulement si $\tilde{z} = \frac{1}{z}$ et $\tilde{w} = \frac{z}{|z|}w$ avec l'application vers $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 = (\mathbb{C} \sqcup \mathbb{C})/\sim$ donnée par $(z, w) \mapsto z$ et $(\tilde{z}, \tilde{w}) \mapsto \tilde{z}$.
- (c) Montrer que le fibré de Hopf est un fibré S^1 -principal.
- (7) Montrer que le fibré de Hopf n'est pas globalement trivial par les quatre manières suivantes.
- (a) Montrer que $\pi_1(S^3) \neq \pi_1(S^2 \times S^1)$ et donc S^3 et $S^2 \times S^1$ ne sont pas homéomorphes.
- (b) Tout fibré trivial a une section globale. Par exemple, on a la section $s : S^2 \rightarrow S^2 \times S^1$ du fibré trivial $S^2 \times S^1 \rightarrow S^2$ donnée par $s(x, y) = (x, y, 1)$. Montrer qu'une section globale de $S^3 \rightarrow S^2$ séparerait S^3 en deux composantes connexes, alors qu'une section globale de $S^2 \times S^1 \rightarrow S^2$ ne sépare pas $S^2 \times S^1$ en deux composantes connexes. Dédurre que le fibré de Hopf n'est pas globalement trivial.
- (c) Montrer qu'une section globale du fibré de Hopf donnerait une sphère plongée dans \mathbb{R}^3 qui intersecterait toutes les fibres exactement une fois. Montrer qu'une telle sphère contredirait que toutes les fibres sont entrelacées.
- (d) Montrer par la question (6)(b) qu'une section globale de h , si elle existe, est équivalente à une paire de fonctions $f, \tilde{f} : \mathbb{C} \rightarrow S^1$ telles que $\tilde{f}(\frac{1}{z}) = \frac{z}{|z|}f(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. En particulier, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ on a $\tilde{f}(0) = \lim_{r \rightarrow \infty} e^{i\theta} f(re^{i\theta})$. Soit $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\tilde{f}(0) = e^{i\theta_0}$. On a que $\lim_{r \rightarrow \infty} f(re^{i\theta}) = e^{i(\theta_0 - \theta)}$. On a donc une famille de lacets $\gamma_r : \mathbb{R} \rightarrow S^1 \times S^1$ donnés par $\gamma_r(\theta) = (e^{i\theta}, f(re^{i\theta}))$ tels que $\gamma_0(\theta) = (e^{i\theta}, \text{cst})$ et $\gamma_\infty(\theta) = (e^{i\theta}, e^{i(\theta_0 - \theta)})$. Montrer, qu'on ne peut pas déformer γ_0 à γ_∞ continuellement.