MAT189 – Analyse réelle

Maxence Mayrand
Département de mathématiques
Université de Sherbrooke

Hiver 2023

Table des matières

Avant-propos

Ces notes ont été rédigées pour le cours d'analyse réelle (MAT189) du baccalauréat en sciences de l'information quantique de l'Université de Sherbrooke au trimestre d'hiver 2023. Elles sont largement inspirées des livres *Introduction à l'analyse réelle* de Labelle et Mercier [3], *Real Analysis and Applications : Theory in Practice* de Davidson et Donsig [2], *Principles of mathematical analysis* de Rudin [4], et *Introduction to real analysis* de Bartle et Sherbert [1]. Aucun de ces livres n'est obligatoire pour le cours.

Symboles et notations

$\mathbb{R}$	nombres réels
$\mathbb{N}$	entiers naturels $\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$
$\mathbb{Z}$	entiers relatifs
$\mathbb{Q}$	nombres rationnels
$\emptyset$	ensemble vide
∞	infini
$\forall$	pour tout
$\exists$	il existe
$\subseteq$	inclus dans
$\in$	appartient à
$\notin$	n'appartient pas à
$\cup$	union
$\cap$	intersection
sup	supremum
inf	infimum
max	maximum
min	minimum
$n!$	factorielle de l'entier naturel n

Chapitre 1

Le système des nombres réels

1.1 Qu'est-ce que l'analyse réelle ?

Le but principal de l'analyse réelle est d'établir une base solide et rigoureuse au calcul différentiel et intégral. Par exemple, on sait bien que

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

car quand x « s'approche » de 0, alors $\frac{\sin x}{x}$ « s'approche » de 1. Mais, qu'est-ce que « s'approcher » veut vraiment dire mathématiquement ? Une fonction continue est une fonction « ininterompue » ou « qui peut se dessiner sans lever le crayon », mais peut-on définir précisément ce que cela veut dire pour une fonction abstraite $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui n'est pas donnée par un dessin ? Par exemple, la fonction

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(5^n \pi x)}{2^n}$$

est-elle continue ? Et que veut vraiment dire une somme infinie $\sum_{n=0}^{\infty}$? Peut-on donner une définition de l'intégrale $\int_0^1 f(x)dx$ plus précise que « l'aire sous la courbe » ? Nous allons répondre à toutes ces questions. En analyse réelle, nous définissons ces concepts de manière rigoureuse et nous démontrons ensuite des conséquences de ces définitions. Par exemple, le célèbre théorème fondamental du calcul différentiel et intégral

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a) \tag{1.1}$$

prendra un tout autre sens : après avoir bien défini la dérivée et l'intégrale, ce résultat sera vu comme une conséquence logique des définitions, démontré hors de tout doute.

1.2 Les axiomes de l'analyse réelle

L'objet d'étude de l'analyse réelle est le système des nombres réels, soit l'ensemble $\mathbb{R}$ muni de ses opérations d'addition $(x, y) \mapsto x + y$, de multiplication $(x, y) \mapsto x \cdot y$, et sa relation d'ordre $\leq$ (plus petit ou égal). Rappelons que l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels contient les entiers naturels

$$\mathbb{N} \coloneqq \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\},$$

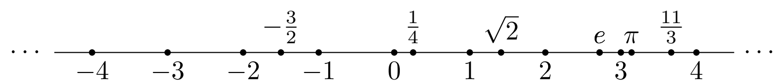
les entiers relatifs

$$\mathbb{Z} \coloneqq \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\},$$

les nombres rationnels

$$\mathbb{Q} \coloneqq \{\tfrac{a}{b} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}\},$$

ainsi que tous les nombres irrationnels tels que $\sqrt{2}$, π et e. L'ensemble $\mathbb{R}$ est généralement visualisé comme une droite s'étandant à l'infinie dans les deux directions et contenant tous ses points :



Remarquez que nous n'avons pas ici donné de définition rigoureuse des nombres réels. Bien que l'idée d'une droite infinie contenant tous ses points soit relativement claire et intuitive, il est surprenamment difficile d'en donner une définition assez précise pour construire une théorie solide du calcul différentiel et intégral. Historiquement, il a fallu attendre la fin du 19e siècle pour qu'on trouve une définition satisfaisante. Compte tenu du fait que les nombres réels sont utilisés depuis l'Antiquité, nous avons pris plusieurs millénaires avant d'y arriver ! Définir rigoureusement $\mathbb{R}$ est assez laborieux et est plus approprié pour un cours sur la théorie des ensembles. Heureusement, il existe une autre approche pour faire de l'analyse réelle qui évite ce problème délicat et qui est généralement utilisée pour un premier cours. C'est l'approche *axiomatique*, qui consiste à énumérer une liste de quelques propriétés élémentaires du système $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ qui serviront à démontrer toutes les autres. Ces propriétés sont toutes assez intuitives (on peut même dire « évidentes ») et il est clair que toute définition des nombres réels devra les satisfaire. Voici les trois premières :

(A1) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ est un ***corps***, c'est-à-dire :
- ***Associativité.*** Pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x + (y + z) = (x + y) + z$ et $x(yz) = (xy)z$.
- ***Commutativité.*** Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $x + y = y + x$ et $xy = yx$.
- ***Distributivité.*** Pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x(y + z) = xy + xz$.
- ***Identité additive.*** Il existe un élément $0 \in \mathbb{R}$ tel que $x + 0 = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- ***Identité multiplicative.*** Il existe un élément $1 \in \mathbb{R}$, $1 \neq 0$, tel que $x \cdot 1 = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- ***Inverses additifs.*** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un élément $-x \in \mathbb{R}$ tel que $x + (-x) = 0$.
- ***Inverses multiplicatifs.*** Pour tout $x \neq 0$ dans $\mathbb{R}$, il existe un élément $x^{-1} \in \mathbb{R}$ tel que $x \cdot x^{-1} = 1$.

(A2) $\leq$ est un ***ordre total***, c'est-à-dire :
- ***Reflexivité.*** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \leq x$.
- ***Antisymétrie.*** Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, si $x \leq y$ et $y \leq x$, alors $x = y$.
- ***Transitivité.*** Pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}$, si $x \leq y$ et $y \leq z$, alors $x \leq z$.
- ***Totalité.*** Pour tout x et y dans $\mathbb{R}$, $x \leq y$ ou $y \leq x$.

(A3) Les opérations $+$ et $\cdot$ sur $\mathbb{R}$ sont compatibles avec la relation d'ordre $\leq$, c'est-à-dire :
- Pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}$, si $x \leq y$, alors $x + z \leq y + z$.
- Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, si $0 \leq x$ et $0 \leq y$, alors $0 \leq xy$.

Le système des nombres réels n'est pas le seul à satisfaire les propriétés (A1), (A2), et (A3). Par exemple, le système des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ a les mêmes propriétés. La différence fondamentale entre les deux est que $\mathbb{R}$ satisfait au *principe de complétude*, que nous allons définir plus bas. Pour le définir, nous avons d'abord besoin de la définition suivante.

Définition 1.1. Un ensemble de nombres réels $E \subseteq \mathbb{R}$ est ***borné supérieurement*** s'il existe un nombre réel $M \in \mathbb{R}$ tel que $x \leq M$ pour tout $x \in E$. Dans ce cas, nous appelons M une ***borne supérieure***. De même, un ensemble $E \subseteq \mathbb{R}$ est ***borné inférieurement*** s'il existe un nombre réel $m \in \mathbb{R}$ tel que $x \geq m$ pour tout $x \in E$, et nous appelons m une ***borne inférieure***. Un ensemble $E \subseteq \mathbb{R}$ est ***borné*** s'il est borné supérieurement et inférieurement.

Exemple 1.2.

(1) L'intervalle $[0, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ est borné inférieurement mais pas supérieurement.

(2) L'intervalle $(-\infty, 4] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 4\}$ est borné supérieurement, mais pas inférieurement.

(3) L'intervalle $[6, 11) = \{x \in \mathbb{R} : 6 \leq x < 11\}$ est borné.

(4) L'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs n'est pas borné.

(5) L'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels est borné inférieurement, mais pas supérieurement.

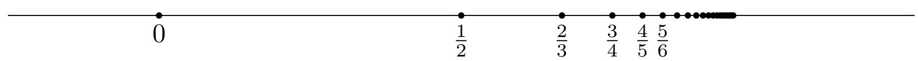
(6) L'ensemble

$$E := \{\tfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} = \{1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{5}, \ldots\}$$

est borné par 0 et 1.

Notez qu'un ensemble E borné supérieurement a une infinité de bornes supérieures : si M est une borne supérieure, alors, tout nombre $M' \geq M$ est aussi une borne supérieure. Il est donc préférable de trouver la borne supérieure la plus petite. Si E possède un maximum, c'est-à-dire un élément $M \in E$ tel que $x \leq M$ pour tout $x \in E$, alors il est évident que M est la plus petite borne supérieure. Par contre, certains ensembles bornés supérieurement n'ont pas de maximum, tel que

$$E := \{\tfrac{n-1}{n} : n \in \mathbb{N}\} = \{0, \tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{4}{5}, \tfrac{5}{6}, \ldots\}.$$



Un bon substitut au maximum est alors la *plus petite borne supérieure*, qui dans ce cas est 1. La propriété fondamentale de $\mathbb{R}$ qui permet de faire de l'analyse est l'existence de cette plus petite borne supérieure :

(A4) **Principe de complétude.** Soit $E \subseteq \mathbb{R}$ un ensemble non vide borné supérieurement. Il existe une ***plus petite borne supérieure de*** E, c'est-à-dire une borne supérieure M de E telle que si $N \in \mathbb{R}$ est une autre borne supérieure de E, alors $M \leq N$.

Remarque 1.3. En revanche, le système des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ ne satisfait pas au principe de complétude. Par exemple, soit un nombre irrationnel tel que $\sqrt{2} = 1.41421356237\ldots$, considérons l'ensemble

$$E = \{1,\ 1.4,\ 1.41,\ 1.414,\ 1.4142,\ 1.41421,\ 1.414213,\ 1.4142135,\ 1.41421356,\ \ldots\}$$

de ses approximations successives. Tous les éléments de E sont rationnels : par exemple

$$1.414 = \frac{1414}{1000} \in \mathbb{Q}.$$

Par contre, la plus petite borne supérieure de E est $\sqrt{2}$ qui est irrationnel. L'ensemble E ne possède pas de plus petite borne supérieure rationnelle.

Les points (A1)–(A4) sont les *axiomes* de l'analyse réelle. C'est-à-dire, nous supposons que les nombres réels forment un système $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ satisfaisant (A1)–(A4), et notre tâche est de démontrer de nouvelles propriétés à partir de celles-ci. Il est assez remarquable que tout le calcul différentiel et intégral repose sur ces quatre axiomes seulement. Par exemple, nous verrons plus tard que le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral (1.1) en est une conséquence purement logique.

Remarque 1.4. Il est même possible de *démontrer* que les nombres réels satisfont (A1)–(A4). Mais comme mentioné plus haut, il faut d'abord donner une définition rigoureuse des nombres réels, ce qui n'est pas évident. Pour un premier cours d'analyse, il est préférable de simplement supposer que le système des nombres réels existe et satisfait (A1)–(A4).

1.3 Supremum et infimum

Tout comme le maximum, la plus petite borne supérieure de E, si elle existe, est unique :

Proposition 1.5. *Soit $E \subseteq \mathbb{R}$ un ensemble non vide borné supérieurement et M_1, M_2 deux plus petites bornes supérieures de E. Alors $M_1 = M_2$.*

Démonstration. Puisque M_1 est une plus petite borne supérieure et M_2 est une borne supérieure, on a $M_1 \leq M_2$. De manière analogue, puisque M_2 est une plus petite borne supérieure et M_1 est une borne supérieure, on a $M_2 \leq M_1$. Par la propriété d'antisymétrie de (A2), nous avons $M_1 = M_2$. $\square$

On peut donc parler de *la* plus petite borne supérieure de E, et lui donner un nom et une notation :

Définition 1.6. Soit $E \subseteq \mathbb{R}$ un ensemble non vide borné supérieurement. La plus petite borne supérieure de E est appelée le ***supremum*** de E, et est notée $\sup(E)$ ou $\sup E$.

Exemple 1.7. Soit
$$E \coloneqq \{\tfrac{n-1}{n} : n \in \mathbb{N}\} = \{0, \tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{4}{5}, \tfrac{5}{6}, \dots\}.$$
Montrons que $\sup(E) = 1$.

Solution. La démonstration comprend deux étapes :

(1) 1 est une borne supérieure de E, et

(2) si M est une autre borne supérieure de E, alors $1 \leq M$.

Pour montrer (1), soit $x \in E$. Alors $x = \frac{n-1}{n}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Il s'ensuit que $x = \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n} < 1$.

Pour montrer (2), soit M une borne supérieure de E. Nous devons montrer que $1 \leq M$. Si, au contraire $1 > M$, alors $1 - M > 0$ et donc $\frac{1}{1-M} > 0$. Il existe alors un nombre naturel $n > \frac{1}{1-M}$. Il s'ensuit que $1 - M > \frac{1}{n}$ et donc $M < 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n} \in E$, contredisant que M est une borne supérieure de E. Par conséquent, $1 \leq M$. □

De façon analogue, si $E \subseteq \mathbb{R}$ est un ensemble non vide borné inférieurement, une ***plus grande borne inférieure de*** E est une borne inférieure m de E telle que si $n \in \mathbb{R}$ est une autre borne inférieure de E, alors $n \leq m$.

Le principe de complétude implique un principe similaire pour les bornes inférieures :

Proposition 1.8. *Soit $E \subseteq \mathbb{R}$ un ensemble non vide borné inférieurement. Alors, il existe une plus grande borne inférieure de E. De plus, elle est unique.*

Démonstration. Définissons
$$-E \coloneqq \{-x : x \in E\}.$$
Si m est une borne inférieure de E, alors $m \leq x$ pour tout $x \in E$, et donc $-x \leq -m$ pour tout $x \in E$. Autrement dit, $-m$ est une borne supérieure de $-E$. Par le principe de complétude (A4), $-E$ possède une plus petite borne supérieure $\sup(-E) \in \mathbb{R}$. Nous allons démontrer que $-\sup(-E)$ est une plus grande borne inférieure de E.

(1) Nous devons d'abord démontrer que $-\sup(-E)$ est une borne inférieure de E. Soit $x \in E$, nous avons $-x \in -E$ et donc $-x \leq \sup(-E)$. Par conséquent, $-\sup(-E) \leq x$ pour tout $x \in E$, c'est-à-dire, $-\sup(-E)$ est une borne inférieure de E.

(2) Nous devons maintenant démontrer que $-\sup(-E)$ est plus grand ou égal à toutes les bornes inférieures de E. Soit $m \in \mathbb{R}$ une borne inférieure de E. Par le premier paragraphe, $-m$ est une borne supérieure de $-E$. Puisque $\sup(-E)$ est la plus petite borne supérieure de $-E$, nous avons $\sup(-E) \leq -m$ et donc $m \leq -\sup(-E)$.

Par (1) et (2), $-\sup(-E)$ est une plus grande borne inférieure de E. Maintenant, supposons qu'il existe une autre plus grande borne inférieure de E, denotée m. Par (2), nous avons $m \leq -\sup(-E)$. De manière analogue, puisque m est une plus grande borne inférieure et que $-\sup(-E)$ est une borne inférieure, nous avons $-\sup(-E) \leq m$. Par conséquent, $m = -\sup(-E)$. □

Cette proposition justifie la définition suivante.

Définition 1.9. Soit E un ensemble non vide borné inférieurement. La plus grande borne inférieure de E est appelée ***infimum*** de E et est notée $\inf(E)$ ou $\inf E$.

Notez que la démonstration de la Proposition 1.8 implique que si E est borné inférieurement, alors $-E$ est borné supérieurement et
$$\sup(-E) = -\inf(E).$$

Il est pratique de définir $\sup E$ et $\inf E$ même si E n'est pas borné supérieurement ou inférieurement :

Définition 1.10. Si un ensemble non vide $E \subseteq \mathbb{R}$ n'est *pas* borné supérieurement, nous écrivons

$$\sup E = \infty$$

et s'il n'est pas borné inférieurement, nous écrivons

$$\inf E = -\infty.$$

Remarque 1.11. Si E n'est pas borné supérieurement, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $x \in E$ tel que $x > n$ (car n n'est pas une borne supérieure de E). Ceci justifie la notation $\sup E = \infty$. Une remarque similaire s'applique pour $\inf E = -\infty$.

Définition 1.12. Le ***maximum*** d'un ensemble E, s'il existe, est un nombre réel $\max E$ dans E tel que $x \leq \max E$ pour tout $x \in E$. De même, le ***minimum*** de E, s'il existe, est un nombre réel $\min E$ dans E tel que $\min E \leq x$ pour tout $x \in E$.

Si $\max E$ existe, alors il est facilement démontrable (Exercice **(1.1)**) que

$$\sup E = \max E.$$

De même (Exercice **(1.2)**), si $\min E$ existe, alors

$$\inf E = \min E.$$

Exemple 1.13.

(1) Soit $A = \{-1, 3, 4, 8\}$, $\min A = -1$ et $\max A = 8$. Donc aussi,

$$\inf A = -1 \quad \text{et} \quad \sup A = 8.$$

(2) Soit $B = \{2n : n \in \mathbb{N}\} = \{2, 4, 6, 8, \cdots\}$, alors $\inf B = \min B = 2$ et $\sup B = \infty$.

(3) Soit

$$E \coloneqq \{\tfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}.$$

Puisque $1 \in E$ est un maximum, nous avons $\sup E = 1$. Par contre E n'a pas de minimum. En effet, si $x \in E$, alors $x = \frac{1}{n}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Il s'ensuit que $\frac{1}{n+1} \in E$ et $\frac{1}{n+1} < x$. Donc x n'est pas un minimum de E. Puisque x est arbitraire, on conclu que E n'a pas de minimum.
Par contre, nous allons montrer que

$$\inf E = 0.$$

La démonstration comprend deux étapes :

(a) 0 est une borne inférieure de E, et

(b) si m est une borne inférieure de E, alors $m \leq 0$.

Montrons (a). Soit $x \in E$. Alors $x = \frac{1}{n}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$, donc $x = \frac{1}{n} > 0$. Donc 0 est une borne inférieure de E.
Montrons (b). Soit m une borne inférieure de E. Nous devons montrer que $m \leq 0$. Si, au contraire, $m > 0$, alors $\frac{1}{m} > 0$, donc il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > \frac{1}{m}$. Il s'ensuit que $\frac{1}{n} < m$, et puisque $\frac{1}{n} \in E$, ceci contredit que m est une borne inférieure de E. Alors, $m \geq 0$.
Par (a) et (b), 0 est la plus grande borne inférieure de E, c'est-à-dire $\inf E = 0$.

Le prochain résultat sera utile plus tard, quand on définira l'intégrale.

Proposition 1.14. *Soit A et B deux ensembles non vides tels que $a \leq b$ pour tout $a \in A$ et $b \in B$. Alors, A est borné supérieurement, B est borné inférieurement, et*

$$\sup(A) \leq \inf(B).$$

Démonstration. L'ensemble A est borné supérieurement, car $a \leq b$ pour tout $a \in A$ et $b \in B$ et B est non vide. De même, B est borné inférieurement. Montrons que $\sup(A) \leq \inf(B)$. Puisque $\sup(A)$ est la plus petite borne supérieure de A, il suffit de montrer que $\inf(B)$ est une borne supérieure de A. Soit $a \in A$. On a $a \leq b$ pour tout $b \in B$, donc a est une borne inférieure de B. Comme $\inf(B)$ est la plus grande borne inférieure de B, on a $a \leq \inf(B)$. On a donc montré que $a \leq \inf(B)$ pour tout $a \in A$, c'est-à-dire, $\inf(B)$ est une borne supérieure de A. Comme $\sup(A)$ est la plus petite borne supérieure de A, on a $\sup(A) \leq \inf(B)$. $\square$

1.4 Exercices

(1.1) Montrer que si un ensemble $E \subseteq \mathbb{R}$ possède un maximum, alors $\sup E = \max E$.

(1.2) Montrer que si un ensemble $E \subseteq \mathbb{R}$ possède un minimum, alors $\inf E = \min E$.

(1.3) Soit $E = \{\frac{n}{2n+1} : n \in \mathbb{N}\}$, trouver $\inf E$ et $\sup E$.

(1.4) Soit $E = \{\frac{n}{n^2+1} : n \in \mathbb{N}\}$, trouver $\inf E$ et $\sup E$.

(1.5) Soit $E = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0\}$, trouver $\inf E$ et $\sup E$.

(1.6) Soit $E \subseteq \mathbb{R}$ un ensemble et $y \in \mathbb{R}$ une borne supérieure de E telle que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un élément $x \in E$ tel que $x > y - \varepsilon$. Montrer que $\sup E = y$.

(1.7) Soit $E = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 4\}$, trouver $\inf E$ et $\sup E$.

(1.8) Soit $E \subseteq \mathbb{R}$ un ensemble non vide borné supérieurement. Montrer que si $a < \sup E$ alors il existe $x \in E$ tel que $a < x$.

(1.9) Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ et $B \subseteq \mathbb{R}$ deux ensembles non vides bornés supérieurement tels que $A \subseteq B$. Montrer que

$$\sup A \leq \sup B.$$

(1.10) Soit $E \subseteq \mathbb{R}$ un ensemble non vide borné supérieurement et $r \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\sup\{r + x : x \in E\} = r + \sup E.$$

(1.11) Soit $E \subseteq \mathbb{R}$ un ensemble non vide borné supérieurement et $r > 0$. Montrer que

$$\sup\{rx : x \in E\} = r \sup E.$$

(1.12) Soit $E = \{1 + \frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N}\}$, trouver $\inf E$ et $\sup E$.

(1.13) Montrer que $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{1+n} = 0$ directement à partir de la Définition 2.2.

Chapitre 2

Suites et convergence

Le but de ce chapitre est de définir la notion

$$\lim_{n\to\infty} a_n$$

de la limite d'une suite de nombres réels $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ et de démontrer certains résultats. Bien que cette notion ait déjà été introduite dans un cours de calcul différentiel et intégral, la définition n'était probablement pas rigoureuse et l'emphase était plutôt mise sur les méthodes de calculs. Dans ce cours, nous nous concentrons sur la formulation précise de cette notion et sur la démonstration de théorèmes.

2.1 Définition de la limite d'une suite

Définition 2.1. Une ***suite*** est une famille de nombres réels

$$(a_n)_{n=1}^{\infty} = (a_1, a_2, a_3, \ldots)$$

indexés par les entiers naturels $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Rappelons que la *valeur absolue* d'un nombre réel x est définie par

$$|x| := \begin{cases} x & ; \text{ si } x \geq 0 \\ -x & ; \text{ si } x < 0. \end{cases}$$

La propriété fondamentale de la valeur absolue, pour ce qui a trait à l'analyse, est ***l'inégalité triangulaire*** :

$$|x+y| \leq |x| + |y| \quad \text{pour tout } x, y \in \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

Démonstration. Soit $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$|x+y|^2 = (x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy \leq |x|^2 + |y|^2 + 2|xy| = (|x| + |y|)^2,$$

donc $|x+y| \leq |x| + |y|$. □

Il sera aussi utile de se rappeler l'identité suivante :

$$|x - L| < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad L - \varepsilon < x < L + \varepsilon \tag{2.2}$$

pour tous nombres réels $x, L \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$ (Exercice **(2.2)**).

Définition 2.2. Un nombre réel L est la ***limite*** d'une suite $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$|a_n - L| < \varepsilon \quad \text{pour tout } n \geq N.$$

Dans ce cas, on dit que la suite ***converge*** vers L, et on écrit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L.$$

Si aucune limite n'existe, on dit que la suite $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ***diverge***.

Le point crucial de cette définition est que le nombre $\varepsilon > 0$ peut être aussi *petit* que l'on désire. Par exemple, soit $\varepsilon = 10^{-100}$, la définition implique que, éventuellement, la différence entre L et les termes a_n va être d'au plus 10^{-100}.

Exemple 2.3. Soit $a_n = \frac{1}{n}$, montrer que $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ converge vers $L = 0$.

Solution. Soit $\varepsilon > 0$. Nous avons $|a_n - L| = |\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n}$. Nous devons donc trouver un nombre $N \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{n} < \varepsilon$ pour tout $n \geq N$. Il suffit de prendre un entier $N > 1/\varepsilon$. En effet, si $n \geq N$, alors $\frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$. $\square$

Exemple 2.4. Soit

$$a_n = \frac{n}{n+1},$$

montrer que $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ converge vers $L = 1$.

Solution. Soit $\varepsilon > 0$. Nous avons

$$|a_n - L| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{n-(n+1)}{n+1}\right| = \left|\frac{-1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1}.$$

Nous devons trouver N tel que $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$ pour tout $n \geq N$. Prenons un entier $N > \frac{1}{\varepsilon}$. Alors, pour tout $n \geq N$, nous avons

$$|a_n - L| = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{N+1} < \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

$\square$

2.2 Quelques propriétés des limites

Théorème 2.5 (Théorème du sandwich). *Soient $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, et $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ des suites telles que*

$$a_n \leq b_n \leq c_n \quad \textit{pour tout } n \in \mathbb{N},$$

et

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L = \lim_{n\to\infty} c_n,$$

alors

$$\lim_{n\to\infty} b_n = L.$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$|a_n - L| < \varepsilon \quad \text{pour tout } n \geq N_1.$$

De même, puisque $\lim_{n\to\infty} c_n = L$, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$|c_n - L| < \varepsilon \quad \text{pour tout } n \geq N_2.$$

Soit $N := \max(N_1, N_2)$. Alors, pour tout $n \geq N$, nous avons $n \geq N_1$ et $n \geq N_2$, et donc

$$L - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < L + \varepsilon.$$

Ainsi, $|b_n - L| < \varepsilon$ pour tout $n \geq N$, et donc $\lim_{n\to\infty} b_n = L$. $\square$

Exemple 2.6. Démontrer que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0.$$

Solution. Nous avons

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

Il a été démontré que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. De manière analogue $\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} = 0$. Ainsi, le théorème du sandwich (Théorème 2.5) implique que $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$. $\square$

Définition 2.7. Une suite $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ est dite ***bornée*** s'il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tel que $m \leq a_n \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 2.8. *Toute suite convergente est bornée.*

Démonstration. Soit $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite convergente et $L = \lim_{n\to\infty} a_n$ sa limite. En utilisant la définition de la limite avec $\varepsilon = 1$, on obtient qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|a_n - L| < 1$ pour tout $n \geq N$. Autrement dit,

$$L - 1 < a_n < L + 1$$

pour tout $n \geq N$. Soit

$$M \coloneqq \max\{a_1, a_2, \ldots, a_{N-1}, L+1\}$$

et

$$m \coloneqq \min\{a_1, a_2, \ldots, a_{N-1}, L-1\},$$

on a que

$$m \leq a_n \leq M$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. □

Il est utile de savoir que les limites sont compatibles avec les opérations d'addition, de multiplication, et de division :

Théorème 2.9. *Soient $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ et $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ des suites convergentes, et $c \in \mathbb{R}$. Alors*

(a)

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) + \left(\lim_{n\to\infty} b_n\right)$$

(b)

$$\lim_{n\to\infty} c a_n = c \lim_{n\to\infty} a_n$$

(c)

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right)$$

(d) *Si $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$, alors*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}.$$

Démonstration. Exercice **(2.10)**. □

Remarque 2.10. Dans la partie (4), on ignore les termes $\frac{a_n}{b_n}$ où $b_n = 0$. Cela ne pose pas problème, car la condition $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$ implique que $b_n \neq 0$ pour tout n suffisamment grand (c'est-à-dire qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $b_n \neq 0$ pour tout $n \geq N$; voir Exercice **(2.9)**).

Proposition 2.11. *Soient $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ et $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ deux suites convergentes et*

$$L \coloneqq \lim_{n\to\infty} a_n, \quad M \coloneqq \lim_{n\to\infty} b_n$$

leur limite. Si $a_n \leq b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors $L \leq M$.

Démonstration. Supposons, par contradiction, que $L > M$. Il s'ensuit que $\varepsilon \coloneqq \frac{1}{2}(L - M) > 0$. La définition de la limite implique qu'il existe $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tels que $|a_n - L| < \varepsilon$ pour tout $n \geq N_1$ et $|b_n - M| < \varepsilon$ pour tout $n \geq N_1$. En particulier, si $n \geq N_1$ et $n \geq N_2$, alors

$$L - \varepsilon < a_n \leq b_n < M + \varepsilon$$

Puisque $L - \varepsilon = \frac{L+M}{2}$ et $M + \varepsilon = \frac{L+M}{2}$, on obtient $\frac{L+M}{2} < \frac{L+M}{2}$, ce qui est impossible. Il s'ensuit que $L \leq M$. □

On obtient immédiatement :

Proposition 2.12. *Soit $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite telle que $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. Si $b \in \mathbb{R}$ est tel que $a_n \leq b$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $L \leq b$. De même, si $a_n \geq b$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $L \geq b$.*

Démonstration. On applique la Proposition 2.11 avec la suite constante $(b)_{n=1}^{\infty}$. □

2.3 Suites monotones

Jusqu'ici, nous n'avons pas utilisé le principe de complétude, et donc les mêmes définitions et résultats fonctionnent aussi pour le système des nombres rationnels. En revanche, le prochain théorème utilise de manière essentielle le principe de complétude. Pour le formuler, nous commençons par la définition suivante.

Définition 2.13. Une suite $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ est ***croissante*** si

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq \cdots,$$

c'est-à-dire $a_n \leq a_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite est ***strictement croissante*** si $a_n < a_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De même, une suite $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ est ***décroissante*** si $a_n \geq a_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et ***strictement décroissante*** si $a_n > a_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Une suite est ***monotone*** si elle est croissante ou décroissante.

Théorème 2.14 (Théorème de convergence monotone)**.** *Toute suite monotone bornée est convergente.*

Démonstration. Soit $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite croissante bornée. En particulier, l'ensemble $E \coloneqq \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ est borné supérieurement. Par le principe de complétude (A4), $L \coloneqq \sup(E)$ existe. Nous allons montrer que $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $L - \varepsilon < \sup(E)$, $L - \varepsilon$ n'est *pas* une borne supérieure de E (car $\sup(E)$ est la *plus petite* borne supérieure). Donc il doit exister au moins un $N \in \mathbb{N}$ tel que $L - \varepsilon < a_N$. Puisque $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ est croissante, nous avons

$$L - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq L < L + \varepsilon$$

pour tout $n \geq N$. Autrement dit, $|a_n - L| < \varepsilon$ pour tout $n \geq N$, c'est-à-dire $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

Si $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ est décroissante et bornée, alors la suite $(-a_n)_{n=1}^{\infty}$ est croissante et bornée. Par le précédent paragraphe, $(-a_n)_{n=1}^{\infty}$ est convergente. Par le Théorème 2.9(b), $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ est aussi convergente et $\lim_{n\to\infty} a_n = -\lim_{n\to\infty} -a_n$. □

Remarque 2.15. Si $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ est croissante et bornée, la limite $L = \lim_{n\to\infty} a_n$ satisfait $a_n \leq L$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En effet, la démonstration du Théorème 2.14 implique que $L = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ et donc L est une borne supérieure pour $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Exemple 2.16. Soit $-1 < c < 1$, montrons que

$$\lim_{n\to\infty} c^n = 0.$$

Solution. Supposons, tout d'abord, que $0 < c < 1$. On a $c^n - c^{n+1} = (1-c)c^n > 0$ donc $c^n > c^{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, où $a_n = c^n$, est donc décroissante. De plus, $0 < c^n < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ est bornée. Par le théorème de convergence monotone (Théorème 2.14), la limite $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ existe. Nous allons montrer que $L = 0$. Par le Théorème 2.9(b), nous avons

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c a_{n-1} = c \lim_{n\to\infty} a_{n-1} = cL,$$

et donc $(1-c)L = 0$. Puisque $1 - c \neq 0$, ceci implique que $L = 0$.

Si $c = 0$, alors $c^n = 0$ pour tout n donc $\lim_{n\to\infty} c^n = 0$.

Finalement, supposons que $-1 < c < 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Nous avons $0 < |c| < 1$, donc $\lim_{n\to\infty} |c|^n = 0$. Il existe alors $N \in \mathbb{N}$ tel que $|c|^n < \varepsilon$ pour tout $n \geq N$, et donc $|c^n - 0| = |c|^n < \varepsilon$ pour tout $n \geq N$. Il s'ensuit que $\lim_{n\to\infty} c^n = 0$. □

Remarque 2.17. L'argument du dernier paragraphe se généralise à l'exercice **(2.7)**.

Exemple 2.18. Soit $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ la suite définie par

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 \\ a_n &= \frac{a_{n-1}}{2} + \frac{1}{a_{n-1}}, \qquad \text{pour tout entier } n \geq 2. \end{aligned}$$

Montrer que $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$.

Solution. Pour montrer la convergence, nous allons montrer que la suite $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ est décroissante et bornée.

On a

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n} - a_n = \frac{2 - a_n^2}{2a_n}. \tag{2.3}$$

Pour montrer que $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ est décroissante, il suffit alors de montrer que $a_n > 0$ et $2 - a_n^2 \leq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Commençons par démontrer par récurrence que $a_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Le cas $n = 1$ est donné : on a $a_1 = 2 > 0$. Supposons maintenant que $a_n > 0$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors, $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n} > 0$. Par récurrence, il s'ensuit que $a_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Montrons maintenant, toujours par récurrence, que $a_n^2 \geq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Le cas $n = 1$ est évident : $a_1^2 = 2^2 = 4 \geq 2$. Maintenant, pour tout entier $n \geq 2$, on a

$$a_n^2 - 2 = \left(\frac{a_{n-1}}{2} + \frac{1}{a_{n-1}}\right)^2 - 2 = \frac{a_{n-1}^2}{4} - 1 + \frac{1}{a_{n-1}^2} = \left(\frac{a_{n-1}}{2} - \frac{1}{a_{n-1}}\right)^2 \geq 0,$$

et donc $a_n^2 \geq 2$.

L'équation (2.3) implique donc que $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ est décroissante. On a aussi $0 < a_n \geq a_1 = 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ est bornée. Par le théorème de convergence monotone (Théorème 2.14), la limite

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n$$

existe.

Puisque $a_n^2 \geq 2$ et $a_n > 0$, nous avons $a_n \geq \sqrt{2}$ pour tout n. La Proposition 2.12 implique alors que $L \geq \sqrt{2}$, et en particulier, $L \neq 0$. Par le Théorème 2.9, nous avons donc

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_{n-1}}{2} + \frac{1}{a_{n-1}}\right) = \frac{L}{2} + \frac{1}{L}.$$

En simplifiant cette équation, on trouve $L^2 = 2$. Puisque $L > 0$, il s'ensuit que $L = \sqrt{2}$. □

Le prochain théorème est une conséquence du théorème de convergence monotone qui sera utile dans la prochaine section.

Théorème 2.19 (Théorème des segments emboîtés)**.** *Soient $I_n = [a_n, b_n]$, pour $n \in \mathbb{N}$, des segments emboîtés, c'est-à-dire $I_{n+1} \subseteq I_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors l'intersection*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{x \in \mathbb{R} : a_n \leq x \leq b_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}\}$$

est non vide.

Démonstration. Puisque $I_{n+1} \subseteq I_n$ et $a_{n+1}, b_{n+1} \in I_{n+1}$, on a $a_{n+1}, b_{n+1} \in I_n$, c'est-à-dire

$$a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

En particulier, la suite $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ est croissante. Elle est aussi bornée, car $a_1 \leq a_n \leq b_1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De même, la suite $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ est décroissante et bornée. Par le théorème de convergence monotone (Théorème 2.14), les limites

$$a \coloneqq \lim_{n\to\infty} a_n \quad \text{et} \quad b \coloneqq \lim_{n\to\infty} b_n$$

existent. Par la Proposition 2.12, on a $a \leq b$, et donc

$$a_n \leq a \leq b \leq b_n$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par conséquent, tous les points dans le segment $[a, b]$ sont contenus dans l'intersection $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$. □

2.4 Sous-suites

Soit une suite $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, on peut obtenir d'autres suites comme, par exemple,

$$(a_{2n})_{n=1}^{\infty} = (a_2, a_4, a_6, a_8, a_{10}, \ldots)$$

ou

$$(a_{n^2})_{n=1}^{\infty} = (a_1, a_4, a_9, a_{16}, a_{25}, \ldots).$$

Plus généralement :

Définition 2.20. Soit $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite. Une ***sous-suite*** de $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ est une suite de la forme $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty} = (a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots)$, où $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$.

Proposition 2.21. *Soit $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite convergente. Toute sous-suite $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ de $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ converge et*

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Démonstration. Soit $L = \lim_{n\to\infty} a_n$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|a_n - L| < \varepsilon$ pour tout $n \geq N$. En particulier, si $k \geq N$, on a $n_k \geq k \geq N$ et donc $|a_{n_k} - L| < \varepsilon$. $\square$

Exemple 2.22. Montrer que la suite $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ donnée par $a_n = (-1)^n$ diverge.

Solution. Si la suite converge, alors toutes ses sous-suites convergent vers la même limite (Proposition 2.21). Mais $(a_{2n})_{n=1}^{\infty} = (1)_{n=1}^{\infty}$ converge vers 1 et $(a_{2n+1})_{n=1}^{\infty} = (-1)_{n=1}^{\infty}$ converge vers -1. $\square$

Théorème 2.23 (Théorème de Bolzano–Weierstrass)**.** *Toute suite bornée possède une sous-suite convergente.*

Démonstration. Soit $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite bornée :

$$m \leq a_n \leq M \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Le segment $I_1 = [m, M]$ contient tous les termes a_n. Si on sépare I_1 en deux segments égaux $I_1 = [m, c] \cup [c, M]$, où $c = \frac{m+M}{2}$, alors un des deux segments $[m, c]$ ou $[c, M]$ contient une infinité de termes a_n. En effet, si $[m, c]$ et $[c, M]$ contiennent chacun un nombre fini de termes a_n, alors $I_1 = [m, M]$ contient aussi un nombre fini de a_n, contredisant le fait que I_1 contient *tous* les a_n. Appelons donc I_2 le segment $[m, c]$ ou $[c, M]$ qui contient une infinité de termes a_n. La longueur de I_2 est la moitié de celle de I_1, soit $\frac{1}{2}(M - m)$. On peut répéter le processus en divisant I_2 en deux segments égaux et en choisissant $I_3 \subseteq I_2$ celui qui contient une infinité de termes a_n. En continuant de la sorte, on obtient une suite de segments emboités $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq I_4 \supseteq \cdots$, qui contiennent chacun une infinité de termes a_n, et tel que I_n est de longueur $\frac{1}{2^n}(M - m)$. Par le théorème des segments emboîtés (Théorème 2.19), il existe un nombre

$$L \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n.$$

Puisque chaque segment I_n contient une infinité de termes a_n, on peut choisir une suite $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ telle que $a_{n_k} \in I_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Nous allons démontrer que $\lim_{n\to\infty} a_{n_k} = L$. En effet, a_{n_k} et L sont tous deux des éléments de I_k, qui est de longueur $\frac{1}{2^k}(M - m)$, donc

$$|a_{n_k} - L| \leq \frac{1}{2^k}(M - m).$$

Puisque $\frac{1}{2^k}(M - m)$ converge vers 0 (Exercice **(2.3)**), on a $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = L$ (Exercice **(2.8)**). $\square$

Exemple 2.24. Montrer qu'il existe une sous-suite de

$$(a_n)_{n=1}^{\infty} = \left(\frac{n^4 \sin(1 + \cos(n)^{\ln n})}{1 + n^4}\right)_{n=1}^{\infty}$$

qui converge.

Solution. Puisque $|\sin x| \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$|a_n| = \left| \frac{n^4 \sin(1 + \cos(n)^{\ln(n)})}{1 + n^4} \right| \leq \frac{n^4}{1 + n^4} < 1$$

et donc $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ est bornée entre -1 et 1. Par le théorème de Bolzano–Weierstrass (Théorème 2.23), $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a une sous-suite convergente. $\square$

2.5 Suites de Cauchy

Revenons maintenant au principe de complétude. Nous allons voir dans cette section que ce principe est lié au fait que, d'une certaine manière, $\mathbb{R}$ contient toutes ses limites. En revanche, cette propriété n'est pas satisfaite par le système des nombres rationnels $\mathbb{Q}$. Par exemple, la suite $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ converge vers le nombre d'Euler $e = 2.71828\ldots$ qui est irrationnel, bien que $a_n \in \mathbb{Q}$ pour tout n. Le fait que $\mathbb{R}$ contienne toutes ses limites peut sembler évident, car, dans la définition de la limite, on *suppose* déjà que la limite est dans $\mathbb{R}$. Cet énoncé peut prendre un sens seulement s'il y a une façon de déterminer si une suite est convergente sans spécifier la limite. C'est en effet possible :

Définition 2.25. Une ***suite de Cauchy*** est une suite $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ telle que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$|a_m - a_n| < \varepsilon$$

pour tous $m, n \geq N$.

Vérifions d'abord que les suites convergentes sont des suites de Cauchy :

Proposition 2.26. *Toute suite convergente est une suite de Cauchy.*

Démonstration. Soit $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite convergente,

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L.$$

Soit $\varepsilon > 0$. En prenant $\frac{\varepsilon}{2}$ dans la définition de la limite, on trouve qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|a_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $n \geq N$. Donc, par l'inégalité triangulaire (2.1),

$$|a_m - a_n| = |(a_m - L) + (L - a_n)| \leq |a_m - L| + |L - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

pour tout $m, n \geq N$. $\square$

Nous allons voir que le principe de complétude implique l'inverse. Le prochain résultat sera utile pour la démonstration.

Lemme 2.27. *Une suite $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ est bornée si et seulement si il existe $B > 0$ tel que $|a_n| < B$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Démonstration. Soit $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite bornée. Par la définition 2.7, il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tels que $m \leq a_n \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a donc

$$-|m| - |M| \leq -|m| \leq m \leq a_n \leq M \leq |M| \leq |m| + |M| \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},$$

c'est-à-dire,

$$|a_n| \leq |m| + |M| \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},$$

On peut donc prendre $B = |m| + |M|$ (ou $B = |m| + |M| + 1$ si $m = M = 0$).

Inversement, soit $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite telle qu'il existe $B > 0$ tel que $|a_n| \leq B$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors, $-B \leq a_n \leq B$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et on peut donc prendre $m = -B$ et $M = B$. $\square$

Proposition 2.28. *Toute suite de Cauchy est convergente.*

Démonstration. Soit $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite de Cauchy. Commençons par démontrer que $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ est bornée. En utilisant $\varepsilon = 1$ dans la définition d'une suite de Cauchy, on a qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|a_m - a_n| < 1$ pour tout $m, n \geq N$. En particulier, pour tout $n \geq N$, on a

$$|a_n| = |(a_n - a_N) + a_N| < |a_n - a_N| + |a_N| < 1 + |a_N|.$$

La suite est donc bornée :

$$\min\{a_1, \dots, a_{N-1}, -1 - |a_N|\} \leq a_n \leq \max\{a_1, \dots, a_{N-1}, 1 + |a_N|\} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Par le théorème de Bolzano–Weierstrass (Théorème 2.23), il existe une sous-suite convergente $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$. Soit

$$L = \lim_{k \to \infty} a_{n_k}.$$

Nous allons montrer que $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ converge aussi vers L. Soit $\varepsilon > 0$. En utilisant $\frac{\varepsilon}{2}$ dans la définition d'une suite de Cauchy, on obtient qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $m, n \geq N$. De même, en utilisant $\frac{\varepsilon}{2}$ dans la définition de la convergence de a_{n_k}, il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que $|a_{n_k} - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $k \geq K$. Soit $k \geq K$ tel que $n_k \geq N$. On a que pour tout $n \geq N$,

$$|a_n - L| = |(a_n - a_{n_k}) + (a_{n_k} - L)| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Donc $\lim_{n \to \infty} a_n = L$. □

Par les propositions 2.26 et 2.28, on a :

Théorème 2.29. *Une suite est convergente si et seulement si elle de Cauchy.* □

Remarque 2.30. Il est aussi possible de démontrer le principe de complétude en supposant que toute suite de Cauchy converge. Le principe de complétude est donc equivalant à la convergence des suites de Cauchy.

2.6 Densité des nombres rationnels et irrationnels

Théorème 2.31. *Tout intervalle ouvert $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ contient un nombre rationnel et un nombre irrationnel.*

Démonstration. On a $b - a > 0$, donc il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > \frac{1}{b-a}$. On a alors $nb - na > 1$, donc il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $na < m < nb$. Il s'ensuit que $a < \frac{m}{n} < b$, donnant un nombre rationnel $\frac{m}{n} \in (a, b)$. De même, il existe un nombre rationnel $r \in (\frac{x}{\sqrt{2}}, \frac{y}{\sqrt{2}})$, et donc $r\sqrt{2} \in (x, y)$. Puisque $\sqrt{2}$ est irrationnel et r est rationnel, $r\sqrt{2}$ est irrationnel. □

Corollaire 2.32. *Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors il existe une suite $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ de nombres rationnels telle que $\lim_{n \to \infty} a_n = x$. De même, il existe une suite $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ de nombres irrationnels telle que $\lim_{n \to \infty} b_n = x$.*

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le Théorème 2.31 implique qu'il existe $a_n \in \mathbb{Q}$ tel que $x < a_n < x + \frac{1}{n}$. Par le théorème du sandwich (Théorème 2.5), on a $\lim_{n \to \infty} a_n = x$. La deuxième partie est démontrée par un argument similaire. □

2.7 Exercices

(2.1) Démontrer par récurrence que pour tous nombres réels $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$,

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|.$$

(2.2) Démontrer l'équation (2.2).

(2.3) Montrer que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ directement à partir de la Définition 2.2.

(2.4) Montrer que $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{(-1)^n}{2n}) = 1$ directement à partir de la Définition 2.2.

(2.5) Montrer que $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1$ directement à partir de la Définition 2.2.

(2.6) Soit $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite convergente, montrer que $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n$.

(2.7) (a) Soit $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite telle que les sous-suites $(a_{2n-1})_{n=1}^{\infty}$ et $(a_{2n})_{n=1}^{\infty}$ convergent vers la même valeur $L \in \mathbb{R}$. Montrer que $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ converge aussi vers L.

(b) Soit $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite telle que les sous-suites $(a_{3n-2})_{n=1}^{\infty}$, $(a_{3n-1})_{n=1}^{\infty}$, et $(a_{3n})_{n=1}^{\infty}$ convergent vers la même valeur $L \in \mathbb{R}$. Montrer que $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ converge aussi vers L.

(2.8) Soient $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ et $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ deux suites telles que $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ et $|a_n - L| \leq b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

(2.9) Soit $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite convergente et $c \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{n\to\infty} b_n \neq c$. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $b_n \neq c$ pour tout $n \geq N$.

(2.10) Démontrer le Théorème 2.9.

(2.11) Soit $c > 0$, trouver $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+c^n}$. (La réponse dépend de c.)

(2.12) Soit $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite monotone telle que $a_n > 0$ pour tout n et $\lim_{n\to\infty} a_n = L > 0$. Montrer que $\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{L}$.

(2.13) Soient $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ et $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ deux suites telles que $|a_n - b_n| < \frac{1}{n}$ pour tout n. Montrer que, si $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ converge vers L, alors $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ converge aussi vers L.

(2.14) Soit $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ la suite définie par

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 \\ a_n &= \frac{a_{n-1}}{2} + \frac{3}{2a_{n-1}}, \end{aligned}$$

montrer que $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ converge vers $\sqrt{3}$.

(2.15) Soit $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite de Cauchy et $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ une sous-suite telle que $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = L$. Montrer que $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

(2.16) Soit $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite telle que la suite $(\sum_{n=1}^{N} |a_n - a_{n+1}|)_{N=1}^{\infty}$ converge. Montrer que $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ converge.

(2.17) Soit $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite telle que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L.$$

Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = L.$$

(2.18) Soient $c \in \mathbb{R}$ et $a_n = \frac{\lfloor nc \rfloor}{n}$, où $\lfloor x \rfloor$ dénote la partie entière de x. Montrer que $\lim_{n\to\infty} a_n = c$.

(2.19) Soit $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite telle que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ et $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite bornée. Montrer que $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

(2.20) Soit $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite telle que $a_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $\lim_{n\to\infty} a_n = L > 0$. Montrer que $\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\} > 0$.

Chapitre 3

Séries

Dans ce chapitre, on définit la notion de convergence d'une série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

où $a_n \in \mathbb{R}$, et on démontre quelques tests de convergence.

3.1 Convergence d'une série

Définition 3.1. Soit $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite. La ***série*** associée à $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ est l'expression

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots . \tag{3.1}$$

La ***suite des sommes partielles*** de la série (3.1) est la suite $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ où

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n. \tag{3.2}$$

On dit que la série (3.1) ***converge*** si la suite des sommes partielles (3.2) converge au sens de la Définition 2.2. Dans ce cas, si $L = \lim_{n\to\infty} s_n$, on écrit

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = L,$$

et on appelle le nombre L la ***valeur*** de la série. Si la suite des sommes partielles ne converge pas, on dit que la série ***diverge***.

Exemple 3.2 (Série géométrique)**.** Soit $r \in \mathbb{R}$ tel que $|r| < 1$. Montrer que

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}.$$

Solution. Soit $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ la suite des sommes partielles. On a

$$s_n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n$$

et

$$rs_n = r + r^2 + \cdots + r^n + r^{n+1},$$

donc

$$s_n - rs_n = 1 - r^{n+1}.$$

Par conséquent,

$$s_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

Par l'Exemple 2.16, $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$. Le Théorème 2.9 implique alors que

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1-0}{1-r} = \frac{1}{1-r}. \qquad \square$$

Exemple 3.3. Montrer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Solution. Soit $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ la suite des sommes partielles. Puisque

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}, \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N},$$

on a

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \left(\lim_{n\to\infty} 1\right) - \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\right) = 1 - 0 = 1,$$

et donc $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$. $\square$

Pour une série donnée, il n'est pas toujours possible de déterminer explicitement la suite des sommes partielles et vérifier directement sa convergence comme nous l'avons fait pour les deux derniers exemples. Heureusement, il existe plusieurs critères de convergence qui ne requièrent pas de calculer les sommes partielles.

Ce premier critère permet de déterminer facilement si une série diverge :

Théorème 3.4. *Si la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, alors $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Par conséquent, si la suite $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ne converge pas vers 0, alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.*

Démonstration. Soit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ une série convergente, soit $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ la suite des sommes partielles, et soit $L = \lim_{n\to\infty} s_n$. On a que $a_n = s_n - s_{n-1}$ pour tout $n \geq 2$, et donc, par le Théorème 2.9(a),

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = \left(\lim_{n\to\infty} s_n\right) - \left(\lim_{n\to\infty} s_{n-1}\right) = L - L = 0. \qquad \square$$

Exemple 3.5. La série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ diverge car la suite $((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$ diverge (Exemple 2.22).

Exemple 3.6. La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ diverge car $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$ (Exemple 2.4).

On doit faire attention au fait que si une série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ satisfait $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, le Théorème 3.4 ne donne aucune information sur sa convergence. L'exemple classique est la ***série harmonique***

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Cette série diverge, bien que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Pour le démontrer, nous observons d'abord le critère suivant.

Théorème 3.7 (Critère de Cauchy). *La série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $m > n \geq N$, on a*

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m| < \varepsilon.$$

Démonstration. Soit $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ la suite des sommes partielles. Alors, pour tous $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m > n$, on a

$$|s_m - s_n| = \left| \sum_{k=1}^{m} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right|.$$

Il s'ensuit que le critère de Cauchy est satisfait si et seulement si $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ est une suite de Cauchy. Par le Théorème 2.29, ceci est équivalent à la convergence de $(s_n)_{n=1}^{\infty}$. □

Exemple 3.8. Montrer que la série harmonique $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

Solution. Il suffit de montrer que le critère de Cauchy n'est pas satisfait. C'est-à-dire, nous devons montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $m > n \geq N$ tels que $\left|\sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k}\right| \geq \varepsilon$.

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\left| \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{1}{k} \right| = \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + \cdots + \frac{1}{2N}$$

Chacun des termes de cette somme est plus grand ou égal à $\frac{1}{2N}$, et il y a N termes, donc

$$\left| \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{1}{k} \right| \geq N \cdot \frac{1}{2N} = \frac{1}{2}.$$

Le critère de Cauchy n'est alors pas satisfait pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$ (en utilisant $m = 2N$ et $n = N$). □

3.2 Tests de convergence

Proposition 3.9. *Soit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ une série telle que $a_n \geq 0$ pour tout n. Cette série converge si et seulement si sa suite des sommes partielles est bornée.*

Démonstration. Puisque $a_n \geq 0$ pour tout n, la suite des sommes partielles $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ est croissante. Par le théorème de convergence monotone (Théorème 2.14), si la suite (s_n) est bornée, elle converge. Inversement, puisque toute suite convergente est bornée (Proposition 2.8), si la suite $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ converge, alors elle est bornée. □

Théorème 3.10 (Test de comparaison). *Soient $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ deux séries. Si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge et il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que*

$$|a_n| \leq b_n \quad \textit{pour tout } n \geq N,$$

alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge aussi.

Démonstration. Montrons que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ satisfait le critère de Cauchy (Théorème 3.7). Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, le critère de Cauchy implique qu'il existe $M \geq N$ tel que

$$\sum_{k=n+1}^{m} b_k < \varepsilon \quad \text{pour tout } m > n \geq M.$$

Par conséquent (Exercice **(2.1)**),

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| \leq \sum_{k=n+1}^{m} b_k < \varepsilon$$

pour tous $m > n \geq M$. Le critère de Cauchy (Théorème 3.7) implique donc que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. □

Exemple 3.11. Montrer que la série
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$
converge.

Solution. Pour tout $n \geq 2$, on a $n^2 \geq n(n-1)$, donc
$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}.$$
Par l'Exemple 3.3, la série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ converge. Par le test de comparaison (Théorème 3.10), la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge. $\square$

Théorème 3.12 (Test du rapport)**.** *Soit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ une série telle que $a_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et*
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L.$$

(1) *Si $L < 1$, la série converge.*
(2) *Si $L > 1$, la série diverge.*

Démonstration. (1) Supposons que $L < 1$. Par la Proposition 3.9, il suffit de montrer que la suite $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ des sommes partielles est bornée. Soit $r \in \mathbb{R}$ tel que $L < r < 1$ et soit $\varepsilon := r - L > 0$. Par la définition de la limite $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que
$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - L \right| < \varepsilon \quad \text{pour tout } n \geq N.$$
Puisque $a_n > 0$, ceci est équivalent à
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < L + \varepsilon = r \quad \text{pour tout } n \geq N.$$
On a donc pour tout $k \geq N$ que
$$\begin{aligned}
a_{N+1} &< r a_N \\
a_{N+2} &< r a_{N+1} < r^2 a_N \\
a_{N+3} &< r a_{N+2} < r^3 a_N \\
&\vdots \\
a_n &< r^{n-N} a_N, \quad \text{pour tout } n \geq N+1.
\end{aligned}$$
Par l'Exemple 3.2, il s'ensuit que pour tout $n \geq N+1$, on a
$$\begin{aligned}
s_n &= s_{N-1} + a_N + a_{N+1} + \cdots + a_n \\
&< s_{N-1} + a_N + r a_N + \cdots + r^{N-n} a_N \\
&\leq s_{N-1} + a_N \sum_{k=0}^{\infty} r^k \\
&= s_{N-1} + \frac{a_N}{1-r}.
\end{aligned}$$
Par conséquent, soit $M := \max(s_1, \ldots, s_N, s_{N-1} + \frac{a_N}{1-r})$, on a $0 \leq s_n \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ est bornée. Par la Proposition 3.9, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

(2) Supposons que $L > 1$. Soit $r \in \mathbb{R}$ tel que $1 < r < L$. Le même argument qu'en (1) montre qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $a_n > r^{n-N} a_N$ pour tout $n \geq N+1$. Puisque $r > 1$, ceci implique que $a_n > a_N > 0$ pour tout $n \geq N$. En particulier, $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ne converge pas vers zero, et donc la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge par le Théorème 3.4. $\square$

Remarque 3.13. Si $L = 1$ dans le Théorème 3.12, on ne peut rien conclure. Par exemple, la série harmonique $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge et $\lim_{n\to\infty} \frac{1/(n+1)}{1/n} = 1$, et la série $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}$ converge et $\lim_{n\to\infty} \frac{1/(n+1)^2}{1/n^2} = 1$.

Exemple 3.14. Montrer que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$$

converge

Solution. Soit $a_n = \frac{2^n}{n!}$. On a $a_n > 0$ pour tout n et

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}/(n+1)!}{2^n/n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1,$$

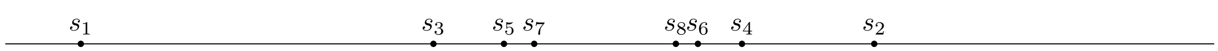
donc la série converge par le test du rapport (Théorème 3.12). □

Théorème 3.15 (Test des séries alternées)**.** *Soit* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *une suite décroissante telle que* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. *Alors la série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$$

converge.

Démonstration. Soit $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ la suite des sommes partielles. Nous allons montrer que la suite $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ se comporte comme sur la figure suivante :



Plus précisément :

(1) La sous-suite $(s_1, s_3, s_5, \ldots) = (s_{2n-1})_{n=1}^{\infty}$ est croissante.
(2) La sous-suite $(s_2, s_4, s_6, \ldots) = (s_{2n})_{n=1}^{\infty}$ est décroissante.
(3) $s_{2m-1} \leq s_{2n}$ pour tous $m, n \in \mathbb{N}$.

Pour montrer (1), on a

$$s_{2n+1} - s_{2n-1} = -a_{2n+1} + a_{2n} \geq 0 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},$$

car $a_{2n} \geq a_{2n+1}$ par la supposition que $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ est décroissante. Pour montrer (2), on a

$$s_{2n+2} - s_{2n} = a_{2n+2} - a_{2n+1} \leq 0 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},$$

car $a_{2n+2} \leq a_{2n+1}$ par la décroissance de $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Pour montrer (3), soit $m, n \in \mathbb{N}$. Soit $N = \max(m, n)$. Alors,

$$s_{2m-1} \leq s_{2N-1} \leq s_{2N-1} + a_{2N} = s_{2N} \leq s_{2n},$$

où nous avons utilisé la croissance de $(s_{2n-1})_{n=1}^{\infty}$ pour la première inégalité, le fait que $a_{2N} \geq 0$ pour la deuxième inégalité, et la décroissance de $(s_{2n})_{n=1}^{\infty}$ pour la troisième inégalité.

Donc la suite $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ satisfait (1), (2), et (3). Par (1), la suite $(s_{2n-1})_{n=1}^{\infty}$ est monotone, et par (3), elle est bornée entre s_1 et s_2. Par le théorème de convergence monotone (Théorème 2.14), la limite

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n-1} = L$$

existe. De même, (2) et (3) implique que $(s_{2n})_{n=1}^{\infty}$ est monotone et bornée, donc la limite

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n} = M$$

existe. Nous avons alors,

$$M - L = \lim_{n\to\infty} s_{2n} - \lim_{n\to\infty} s_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} (s_{2n} - s_{2n-1}) = \lim_{n\to\infty} a_{2n} = 0,$$

donc $L = M$. Il s'ensuit que $\lim_{n\to\infty} s_n = L$ (Exercice **(2.7)**a). □

Exemple 3.16. Bien que la série harmonique $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, sa version alternée

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

converge par le test des séries alternées (Théorème 3.15). Il est possible de montrer que la valeur de cette série est $\ln(2)$, mais il faut d'abord définir l'intégrale, ce qui viendra au Chapitre 6. Pour le moment, nous nous contentons de constater que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} > 0$. En effet, soit $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ la suite des sommes partielles. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} s_{2n} &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n)} \\ &> \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Puisqu'une sous-suite d'une suite convergente converge vers la même limite (Proposition 2.21), nous avons que $(s_{2n})_{n=1}^{\infty}$ converge. Par la Proposition 2.12,

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n} \geq \frac{1}{2}.$$

Il s'ensuit que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} s_{2n} \geq \frac{1}{2}.$$

3.3 Convergence absolue et conditionnelle

Cette section illustre le fait que, pour certaines séries, l'ordre des termes est important pour en déterminer sa valeur.

Exemple 3.17. Dans la dernière section, nous avons montré que la série harmonique alternée

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots \tag{3.3}$$

converge vers une valeur $L > 0$. Considérons maintenant la série suivante, où l'on a simplement changé l'ordre des termes :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots, \tag{3.4}$$

où

$$a_{3n-2} = \frac{1}{2n-1}, \quad a_{3n-1} = -\frac{1}{4n-2}, \quad a_{3n} = -\frac{1}{4n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Nous allons montrer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{L}{2},$$

c'est-à-dire, en réarrangeant les termes de (3.3), la valeur de la série passe de L à $\frac{L}{2}$.

Montrons d'abord que la série (3.4) converge. Soit $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ la suite des sommes partielles. Puisque

$$
\begin{aligned}
a_{3n-2} + a_{3n-1} + a_{3n} &= \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2(2n-1)} - \frac{1}{4n} && (3.5)\\
&= \frac{1}{2(2n-1)} - \frac{1}{4n} && (3.6)\\
&= \frac{2n-(2n-1)}{4n(2n-1)} && (3.7)\\
&= \frac{1}{4n(2n-1)}, && (3.8)
\end{aligned}
$$

on a que

$$s_{3n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k(2k-1)}.$$

C'est-à-dire, $(s_{3n})_{n=1}^{\infty}$ est la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n(2n-1)}$. On a $\frac{1}{4n(2n-1)} \leq \frac{1}{4n(2n-2)} = \frac{1}{8n(n-1)} \leq \frac{1}{n(n-1)}$, donc $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n(2n-1)}$ converge par le test de comparaison (Théorème 3.10) et l'Exemple 3.3. Il s'ensuit que $(s_{3n})_{n=1}^{\infty}$ converge. De plus,

$$|s_{3n} - s_{3n-1}| = \frac{1}{4n}$$

donc $(s_{3n-1})_{n=1}^{\infty}$ converge vers la même limite (Exercice **(2.13)**). De même,

$$|s_{3n} - s_{3n+1}| = \frac{1}{2n+1}$$

donc

$$\lim_{n\to\infty} s_{3n} = \lim_{n\to\infty} s_{3n-1} = \lim_{n\to\infty} s_{3n+1}.$$

Il s'ensuit que $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ converge (Exercice **(2.7)**b) et donc (3.4) est une série convergente.

Par (3.6), on a

$$a_{3k-2} + a_{3k-1} + a_{3k} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right), \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N},$$

et donc

$$
\begin{aligned}
s_{3n} &= (a_1 + a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6) + \cdots + (a_{3n-2} + a_{3n-1} + a_{3n})\\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right).
\end{aligned}
$$

Par conséquent,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_{3n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \frac{L}{2}. \qquad \square$$

L'exemple précédent montre que la valeur d'une série peut changer en changeant l'ordre des termes. Cependant, certaines séries ont la propriété que leur valeur est indépendante de l'ordre des termes :

Définition 3.18. Une série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ***converge absolument*** si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge. Une série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ***converge conditionnellement*** si elle converge, mais $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverge.

Exemple 3.19. La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ converge absolument, car $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge (Exemple 3.11). En revanche, la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge conditionnellement, car $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ est la série harmonique qui diverge (Exemple 3.8).

Théorème 3.20. *Toute série absolument convergente converge.*

Démonstration. Soit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ une série telle que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge. En particulier, la série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ satisfait au critère de Cauchy (Théorème 3.7). Montrons que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ satisfait aussi au critère de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $m > n \geq N$, on a

$$||a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_m|| < \varepsilon.$$

Il s'ensuit que pour tous $m > n \geq N$, on a

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_m| < \varepsilon. \qquad \square$$

Définition 3.21. Un ***réarrangement*** d'une série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

est une série de la forme

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)},$$

où

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

est une fonction bijective.

Théorème 3.22. *Soit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ une série absolument convergente telle que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = L.$$

Tout réarrangement de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge aussi vers L.

Démonstration. Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction bijective. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque la suite $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, elle satisfait au critère de Cauchy (Théorème 3.7). Il existe alors $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{k=n+1}^{m} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{pour tous } m > n \geq N.$$

De plus, comme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = L$, il existe $M \geq N$ tel que

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k - L \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{pour tout } n \geq M.$$

Puisque f est bijective, il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que

$$\{1, 2, \ldots, M\} \subseteq \{f(1), f(2), \ldots, f(K)\}.$$

Soit $n \geq K$, et soit

$$m := \max\{f(k) : 1 \leq k \leq n\}.$$

On a

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=1}^{n} a_{f(k)} - L \right| &= \left| \left(\sum_{k=1}^{n} a_{f(k)} - \sum_{k=1}^{M} a_k \right) + \left(\sum_{k=1}^{M} a_k - L \right) \right| \\
&\leq \left| \sum_{k=1}^{n} a_{f(k)} - \sum_{k=1}^{M} a_k \right| + \left| \sum_{k=1}^{M} a_k - L \right| \\
&\leq \sum_{k=M+1}^{m} |a_k| + \left| \sum_{k=1}^{M} a_k - L \right| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que $\sum_{k=1}^{\infty} a_{f(k)} = L$. $\square$

Remarque 3.23. Il est possible de grandement généraliser l'Exemple 3.17 et démontrer que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est une série qui converge conditionnellement, alors pour tout $L \in \mathbb{R}$, il existe un réarrangement $\sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)}$ qui converge vers L. Nous ne couvrons pas la démonstration dans ce cours, mais l'étudiante ou l'étudiant intéressé peut se référer à [3, Théorème 7.38].

3.4 Exercices

(3.1) Dire si les séries suivantes sont convergentes ou divergentes.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n}$
(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{n+7}$
(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$
(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$
(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)}$

(3.2) Montrer que
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{1}{4}.$$
(Indice : Trouver $A, B \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{A}{4n-3} + \frac{B}{4n+1}$ et utiliser une approche semblable à celle de l'Exemple 3.3.)

(3.3) Montrer que
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \frac{3}{4}.$$
(Indice : $\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$. Utiliser une approche semblable à celle de l'Exemple 3.3.)

(3.4) Calculer
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}}.$$
(Indice : multiplier le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ et utiliser une approche semblable à celle de l'Exemple 3.3.)

(3.5) Soit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ une série convergente telle que $a_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ est convergente. Est-ce toujours vrai si l'on ne requiert pas que $a_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$?

(3.6) Soit $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite telle que $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$. Montrer qu'il existe une sous-suite $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ telle que $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$ converge.

(3.7) Montrer que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ et $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ convergent, alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converge. (Indice : Montrer que $|ab| \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ en utilisant que $(|a|-|b|)^2 \geq 0$. Utiliser le test de comparaison.)

(3.8) (Test de la racine.) Soit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ une série telle que $a_n \geq 0$ pour tout n et la suite $(\sqrt[n]{a_n})_{n=1}^{\infty}$ converge vers $L \in \mathbb{R}$. Montrer que si $L < 1$, alors la série converge, et si $L > 1$, alors la série diverge. (Indice : s'inspirer de la démonstration du test du rapport (Théorème 3.12).)

(3.9) Montrer que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge et $a_n \neq -1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-a_n}{1+a_n}$ diverge.

(3.10) Soit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ une série absolument convergente, et $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite bornée. Montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converge absolument.

(3.11) Montrer que si la suite $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ satisfait $a_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L < 1$, alors $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. (Indice : Utiliser le test du rapport (Théorème 3.12).)

(3.12) Soit $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite telle que $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ existe. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1})$ converge et trouver sa valeur.

(3.13) Soit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ des séries convergentes. Montrer que $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ est aussi convergente et que
$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

(3.14) Soit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ une série convergente et $c \in \mathbb{R}$. Montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ est aussi convergente et
$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

(3.15) Est-il vrai que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sont des séries convergentes, alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ est aussi convergente ?

(3.16) Soit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ une série convergente telle que $a_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ une série telle que

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{b_n}{a_n}\right| = L$$

existe. Montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge absolument.

(3.17) Soient $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ des séries telles qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $a_n = b_n$ pour tout $n \geq N$. Montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si et seulement si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge.

(3.18) Soit $\sum_{n=1}^{\infty}$ une série convergente telle que $a_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $b_n = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ est divergente.

(3.19) Soit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ une série convergente, telle que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = L$. Montrer que $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})$ converge et trouver sa valeur en fonction de L.

(3.20) Soient $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ des séries convergentes telles que $a_n \geq 0$ et $b_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \max(a_n, b_n)$ est convergente.

(3.21) Soit $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite décroissante telle que $a_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Montrer que $\lim_{n\to\infty} n a_n = 0$.

(3.22) Soit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ une série convergente. Montrer que $\lim_{k\to\infty} \sum_{n=k}^{\infty} a_n = 0$.

Chapitre 4

Fonctions

Le but de cette section est d'introduire la notion de continuité d'une fonction et de démontrer certaines conséquences de cette propriété.

4.1 Conventions sur les fonctions

Dans ces notes, le terme « ***fonction*** » désignera toujours une fonction d'une variable réelle

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R},$$

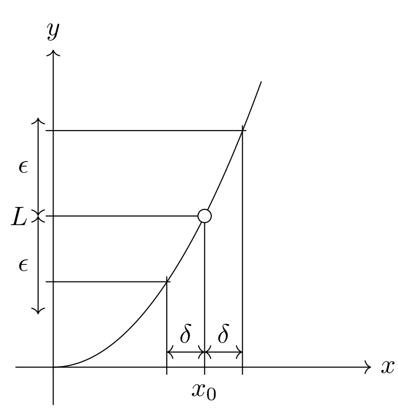
où le ***domaine*** D de f est une union d'intervalles de longueur positive ou infinie dans $\mathbb{R}$. Par exemple, $D = \mathbb{R}$, $D = [0, \infty)$, $D = [-1, 0) \cup (0, 1]$, et $D = (-\infty, 2) \cup [3, 4)$, sont des domaines valides, mais pas $D = \{0\}$. Un domaine qui reviendra souvent est un ***segment***, c'est-à-dire, un intervalle de la forme $[a, b]$, où $a, b \in \mathbb{R}$ et $a < b$.

Soit D un domaine, on dénotera par $\overline{D}$ l'union de D et de toutes les bornes des intervalles le constituant, excluant $\pm\infty$. Par exemple, si $D = (0, 1)$, alors $\overline{D} = [0, 1]$. Si $D = (-1, 0) \cup (0, \infty)$, alors $\overline{D} = [-1, \infty)$.

4.2 Limite

Définition 4.1. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in \overline{D}$. Un nombre $L \in \mathbb{R}$ est la ***limite*** de f au point x_0 si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un nombre $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in D$ satisfaisant $0 < |x - x_0| < \delta$, on a $|f(x) - L| < \varepsilon$. Dans ce cas, on écrit

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L.$$



Exemple 4.2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par $f(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = x_0$$

pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$.

Solution. Soit $\varepsilon > 0$. On doit trouver un nombre $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ satisfaisant $0 < |x - x_0| < \delta$, on a $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Puisque $|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0|$, on peut prendre $\delta \coloneqq \varepsilon$. $\square$

Exemple 4.3. Montrer que

$$\lim_{x \to x_0} x^2 = x_0^2$$

pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$.

Solution. Soit $\varepsilon > 0$. On doit trouver un nombre $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ satisfaisant $0 < |x - x_0| < \delta$, on a $|x^2 - x_0^2| < \varepsilon$. On a

$$|x^2 - x_0^2| = |(x + x_0)(x - x_0)| = |x + x_0||x - x_0| \leq (|x| + |x_0|)|x - x_0|$$

De plus,

$$|x| = |(x - x_0) + x_0| \leq |x - x_0| + |x_0|.$$

Donc, si $|x - x_0| < \delta$, on a

$$|x^2 - x_0^2| \leq (|x - x_0| + 2|x_0|)|x - x_0| < (\delta + 2|x_0|)\delta.$$

Par conséquent, il suffit de trouver $\delta > 0$ tel que $(\delta + 2|x_0|)\delta \leq \varepsilon$. Si $\delta \leq 1$ et $\delta \leq \frac{\varepsilon}{1+2|x_0|}$, alors $(\delta + 2|x_0|)\delta \leq (1 + 2|x_0|)\delta \leq \varepsilon$. Il suffit alors de prendre

$$\delta \coloneqq \min\left(1, \frac{\varepsilon}{1 + 2|x_0|}\right).$$ $\square$

Le prochain résultat relie la notion de limite d'une fonction avec la notion de limite d'une suite telle que vue au Chapitre 2.

Théorème 4.4 (Critère séquentiel de la limite)**.** *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in \overline{D}$. Alors,*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

si et seulement si pour toute suite $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ qui converge vers x_0 telle que $a_n \in D$ et $a_n \neq x_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = L$.

Démonstration. ($\implies$) Supposons que $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$. Soit $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite qui converge vers x_0 telle que $a_n \in D$ et $a_n \neq x_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On doit montrer que $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(L)$. Soit $\varepsilon > 0$. Par la définition de $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$, il existe $\delta > 0$ tel que $|f(x) - L| < \varepsilon$ pour tout $x \in D$ tel que $0 < |x - x_0| < \delta$. Puisque $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|a_n - x_0| < \delta$ pour tout $n \geq N$. Il s'ensuit que si $n \geq N$, alors $0 < |a_n - x_0| < \delta$, et donc $|f(a_n) - L| < \varepsilon$. Par conséquent, $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = L$.

($\impliedby$) Supposons que pour toute suite $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ qui converge vers x_0 telle que $a_n \in D$ et $a_n \neq x_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = L$. On doit montrer que $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$. Supposons le contraire, c'est-à-dire que L n'est pas la limite de f au point x_0. Donc, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\delta > 0$, il existe $x \in D$ tel que $0 < |x - x_0| < \delta$ et $|f(x) - L| \geq \varepsilon$. En prenant $\delta = \frac{1}{n}$, où $n \in \mathbb{N}$, on obtient un nombre $a_n \in D$ tel que $0 < |a_n - x_0| < \frac{1}{n}$ et $|f(a_n) - L| \geq \varepsilon$. Ces nombres forment une suite $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ telle que

$$a_n \in D \quad \text{et} \quad a_n \neq x_0 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},$$

$$|a_n - x_0| < \frac{1}{n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \tag{4.1}$$

et

$$|f(a_n) - L| \geq \varepsilon \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \tag{4.2}$$

L'inégalité (4.1) montre que $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$ (Exercice **(2.13)**), mais l'inégalité 4.2 montre que $(f(a_n))_{n=1}^{\infty}$ ne converge pas vers L, contredisant l'hypothèse. On a donc $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$. $\square$

Cette relation est utile pour démontrer certains théorèmes sur les limites de fonctions à partir de résultats déjà établis sur les suites, sans utiliser directement la définition avec ε et δ. Par exemple, on peut facilement obtenir le prochain théorème à partir du théorème analogue sur les suites (Théorème 2.9).

Théorème 4.5. *Soient $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions de domaine commun D et $x_0 \in \overline{D}$ tels que les limites*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \quad et \quad \lim_{x\to x_0} g(x)$$

existent.

(a) *On a*

$$\lim_{x\to x_0} (f(x)+g(x)) = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right) + \left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right).$$

(b) *Pour tout $c \in \mathbb{R}$, on a*

$$\lim_{x\to x_0} cf(x) = c \lim_{x\to x_0} f(x).$$

(c) *On a*

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)\left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right).$$

(d) *Si $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in D$ et $\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$, alors*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}.$$

Démonstration. Montrons (a). On utilise le critère séquentiel de la limite (Théorème 4.4). Soit $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite qui converge vers x_0 telle que $a_n \in D$ et $a_n \neq x_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $L = \lim_{x\to x_0} f(x)$ et $M = \lim_{x\to x_0} g(x)$. Le critère séquentiel de la limite implique que $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = L$ et $\lim_{n\to\infty} g(a_n) = M$. Par le Théorème 2.9(a), on a $\lim_{n\to\infty}(f(a_n)+g(a_n)) = L + M$. Il s'ensuit par une autre application du critère séquentiel de la limite que $\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = L + M$.

Les démonstrations de (b), (c) et (d) sont similaires (Exercice **(4.4)**). □

De même, le critère séquentiel de la limite et le théorème du sandwich pour les suites (Théorème 2.5) impliquent directement le prochain résultat.

Théorème 4.6 (Théorème du sandwich)**.** *Soient $f, g, h : D \to \mathbb{R}$ des fonctions et $x_0 \in \overline{D}$ tels que*

$$f(x) \le g(x) \le h(x) \qquad pour\ tout\ x \in D, x \neq x_0$$

et

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L = \lim_{x\to x_0} h(x).$$

Alors,

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = L.$$

Démonstration. Exercice **(4.10)**. □

Exemple 4.7. Montrer que

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin(\tfrac{1}{x}) = 0.$$

Solution. On a $-1 \le \sin(y) \le 1$ pour tout $y \in \mathbb{R}$ (voir la Section 4.5 pour plus de détails sur les fonctions trigonométriques), donc

$$-x^2 \le x^2 \sin(\tfrac{1}{x}) \le x^2, \quad \text{pour tout } x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty).$$

On a $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$ par l'Exemple 4.3, et aussi $\lim_{x\to 0} -x^2 = 0$ par le Théorème 4.5(b). Par le théorème du sandwich (Théorème 4.6), on a $\lim_{x\to 0} x^2 \sin(\frac{1}{x}) = 0$. □

4.3 Continuité

La prochaine définition est une des plus importantes en mathématiques.

Définition 4.8. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in D$. La fonction f est ***continue au point*** x_0 si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un nombre $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in D$ satisfaisant $|x - x_0| < \delta$, on a $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Sinon, f est ***discontinue au point*** x_0. Si f est continue en tout point de D, on dit que f est ***continue***, et si non, on dit que f est ***discontinue***.

La continuité est intimement liée à la notion de limite.

Proposition 4.9. *Une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est continue au point $x_0 \in D$ si et seulement si*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Démonstration. Dans la Définition 4.8, la seule différence avec la définition de la limite $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ est qu'on ne requiert pas que $0 < |x - x_0|$, c'est-à-dire que $x \neq x_0$. Mais si $x = x_0$, alors $|f(x) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$, donc les énoncés sont équivalents. $\square$

Exemple 4.10. L'Exemple 4.2 montre que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ est continue. L'Exemple 4.3 montre que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$ est continue.

Exemple 4.11. Montrer que la fonction signe

$$\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

est discontinue.

Solution. Montrons que sgn est discontinue au point $x = 0$. Il faut montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\delta > 0$, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x - 0| < \delta$ et $|\operatorname{sgn}(x) - \operatorname{sgn}(0)| \geq \varepsilon$. Soit $\varepsilon = \frac{1}{2}$ et soit $\delta > 0$. En prenant $x = \frac{\delta}{2}$, on a que $|x - 0| = \frac{\delta}{2} < \delta$ et $|\operatorname{sgn}(x) - \operatorname{sgn}(0)| = |1 - 0| = 1 \geq \varepsilon$. $\square$

La Proposition 4.9 et le Théorème 4.5 impliquent immédiatement le prochain théorème.

Théorème 4.12. (a) *Soit $f, g : D \to \mathbb{R}$ des fonctions de domaine commun D qui sont continues au point $x_0 \in D$. Alors,*

(a) *$f + g$ est continue au point x_0,*

(b) *pour tout $c \in \mathbb{R}$, cf est continue au point x_0,*

(c) *fg est continue au point x_0, et*

(d) *si $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in D$, alors f/g est continue au point x_0.* $\square$

Exemple 4.13. Montrer que toute fonction rationnelle

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \quad \text{où } p \text{ et } q \text{ sont des polynômes et } q \neq 0$$

est continue sur son domaine $D = \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$.

Solution. On a vu dans l'Exemple 4.10 que la fonction $f(x) = x$ est continue. En appliquant la partie (c) du Théorème 4.12 avec f et $g = f$, on obtient que x^2 est continue. En continuant de la sorte, on a que x^n est continue pour tout $n \in \mathbb{N}$. En appliquant (a) et (b), on a que tout polynôme $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, où $a_i \in \mathbb{R}$, est continue. Finalement, par (d), toute fonction rationnelle est continue sur son domaine. $\square$

Par exemple, la fonction

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$$

est continue sur $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \pm 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$.

Une légère modification de la démonstration du critère séquentiel de la limite (Théorème 4.4) donne le prochain théorème.

Théorème 4.14 (Critère séquentiel de la continuité)**.** *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in D$. Alors f est continue au point x_0 si et seulement si pour toute suite $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ telle que $a_n \in D$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$, on a $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0)$.* □

Remarque 4.15. Contrairement au critère séquentiel de la limite, on n'a pas besoin d'imposer que $a_n \neq x_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 4.16. Soit

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Montrer que f est discontinue en tout point.

Solution. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Supposons d'abord que $x_0 \in \mathbb{Q}$. Par la densité des nombres irrationnels, il existe une suite $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ telle que $a_n \notin \mathbb{Q}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$ (Corollaire 2.32). On a alors $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0 \neq f(x_0) = 1$. Par le critère séquentiel de la continuité (Théorème 4.14), f n'est pas continue en x_0. De même, si $x_0 \notin \mathbb{Q}$, alors il existe une suite $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ telle que $b_n \in \mathbb{Q}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\lim_{n\to\infty} b_n = x_0$ (Corollaire 2.32). On a $\lim_{n\to\infty} f(b_n) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \neq f(x_0) = 0$, donc f n'est pas continue en x_0. □

Remarque 4.17. Il est possible de construire une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui est continue en tout point irrationnel et discontinue en tout point rationnel. Elle est définie en posant $f(x) = 0$ si x est irrationnel et $f(x) = \frac{1}{b}$ si $x = \frac{a}{b}$ où $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}$ sont relativement premiers. Nous ne couvrons pas cette fonction dans ce cours, mais l'étudiante ou l'étudiant intéressé peut consulter [3, p. 103].

Tout comme le critère séquentiel de la continuité, le critère séquentiel de la limite est très utile pour simplifier les démonstrations. Par exemple :

Théorème 4.18. *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : E \to \mathbb{R}$ des fonctions telles que $f(x) \in E$ pour tout $x \in D$, et soit*

$$\begin{aligned} g \circ f : D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto g(f(x)) \end{aligned}$$

leur composition. Si f est continue au point $x_0 \in D$ et g est continue au point $f(x_0) \in E$, alors $g \circ f$ est continue au point x_0. En particulier, si f et g sont continues, alors $g \circ f$ l'est aussi.

Démonstration. On utilise le critère séquentiel de la continuité (Théorème 4.14). Soit $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite telle que $a_n \in D$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$. Puisque f est continue en x_0, on a $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0)$. Puisque g est continue en $f(x_0)$, le critère séquentiel appliqué à la suite $(f(a_n))_{n=1}^{\infty}$ montre que $\lim_{n\to\infty} g(f(a_n)) = g(f(x_0))$, c'est-à-dire $\lim_{n\to\infty} (g \circ f)(a_n) = (g \circ f)(x_0)$. Par le critère séquentiel de la continuité, $g \circ f$ est continue en x_0. □

Exemple 4.19. La fonction $g(x) = \sqrt{x}$ est continue sur $[0, \infty)$ (Exercice **(4.3)**) et la fonction $f(x) = 1 + x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$ (Exemple 4.13). Puisque $f(x) \in [0, \infty)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, le Théorème 4.18 montre que la fonction $g(f(x)) = \sqrt{1 + x^2}$ est continue.

Définition 4.20. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction. L'***image*** de f est l'ensemble

$$f(D) := \{f(x) : x \in D\}.$$

On dit que la fonction est ***bornée*** si l'ensemble $f(D)$ est borné, c'est-à-dire, s'il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tels que

$$m \leq f(x) \leq M \quad \text{pour tout } x \in D.$$

Notons que f est bornée si et seulement si il existe $B > 0$ tel que $|f(x)| \leq B$ pour tout $x \in D$ (voir la démonstration du Lemme 2.27).

Théorème 4.21. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment $[a, b]$. Alors, f est bornée.*

Démonstration. Supposons, au contraire, que f n'est pas bornée. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $a_n \in [a, b]$ tel que $|f(a_n)| > n$. Puisque $a \leq a_n \leq b$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ est bornée. Par le théorème de Bolzano–Weierstrass (Théorème 2.23), il existe une sous-suite $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ telle que

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = L$$

existe. Puisque $a \leq a_{n_k} \leq b$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a \leq L \leq b$ (Proposition 2.12), c'est-à-dire $L \in [a, b]$. Puisque f est continue en L, on a $\lim_{k\to\infty} f(a_{n_k}) = f(L)$ (Théorème 4.14). On obtient une contradiction car $|f(a_{n_k})| > n_k \geq k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, donc la suite $(f(a_{n_k}))_{k=1}^{\infty}$ n'est pas bornée et donc ne peut converger. ☐

Définition 4.22. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f ***atteint un maximum*** si son image $f(D)$ a un maximum, c'est-à-dire, s'il existe $x_{\max} \in D$ tel que $f(x) \leq f(x_{\max})$ pour tout $x \in D$. De même, on dit que f ***atteint un minimum*** si $f(D)$ a un minimum, c'est-à-dire, s'il existe $x_{\min} \in D$ tel que $f(x_{\min}) \leq f(x)$ pour tout $x \in D$.

Les deux prochains résultats sont parmi les propriétés les plus importantes des fonctions continues. Nous allons les utiliser à maintes reprises dans les prochains chapitres.

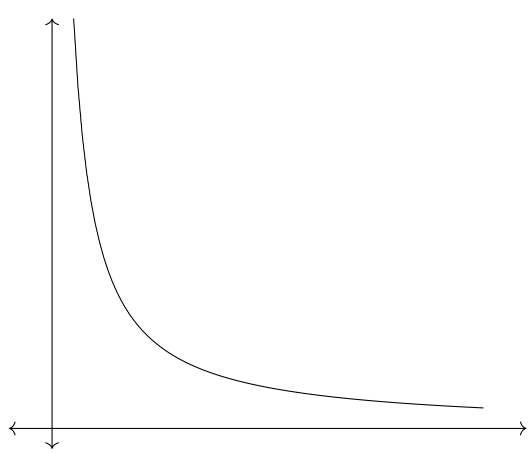
Théorème 4.23 (Théorème des valeurs extrêmes)**.** *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment $[a, b]$. Alors, f atteint un minimum et un maximum.*

Démonstration. Par le Théorème 4.21, l'ensemble $E := f([a, b])$ est borné. Par le principe de complétude, $\inf(E)$ et $\sup(E)$ existent. On doit montrer que $\inf(E) \in E$ et $\sup(E) \in E$. Soit $M := \sup(E)$. Montrons que $M \in E$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre $M - \frac{1}{n}$ n'est pas une borne supérieure de $E = f([a, b])$, donc il existe $x_n \in [a, b]$ tel que $M - \frac{1}{n} < f(x_n)$. Par le théorème de Bolzano–Weierstrass (Théorème 2.23), il existe une sous-suite $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ telle que $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = L$ existe. Puisque $a \leq x_{n_k} \leq b$ pour tout k, on a aussi $a \leq L \leq b$ (Proposition 2.12). Par la continuité de f et le critère séquentiel de la continuité (Théorème 4.14), on a $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(L)$. On a

$$M - \frac{1}{n_k} < f(x_{n_k}) \leq \sup(E) = M,$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$, donc $f(L) = M$ par le théorème du sandwich (Théorème 2.5). Il s'ensuit que $M \in f([a, b]) = E$. La démonstration que $\inf(E) \in E$ est similaire et est laissée en exercice (Exercice **(4.11)**). ☐

Exemple 4.24. Il est important que la fonction f soit continue sur un segment $[a, b]$, et non un intervalle ouvert (a, b) ou semi-ouvert comme $(a, b]$ ou $[a, b)$. Par exemple, la fonction $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ est continue, mais n'atteint ni de maximum ni de minimum.



Théorème 4.25 (Théorème des valeurs intermédiaires)**.** *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment $[a,b]$ telle que $f(a) \neq f(b)$, et soit y un nombre compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Alors, il existe $c \in (a,b)$ tel que $f(c) = y$.*

Démonstration. Montrons le cas où $f(a) < y < f(b)$ (le cas où $f(b) < y < f(a)$ est similaire). Soit $E = \{x \in [a,b] : f(x) < y\}$. Alors, E est non vide (car $a \in E$) et borné (par a et b), donc $\sup(E)$ existe. Soit $c := \sup(E)$. Montrons que $f(c) = y$. Puisque $a \leq x \leq b$ pour tout $x \in E$, on a $a \leq c \leq b$, c'est-à-dire $c \in [a,b]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c - \frac{1}{n}$ n'est pas une borne supérieure de E, donc il existe $x_n \in E$ tel que $c - \frac{1}{n} < x_n \leq c$. Par le théorème du sandwich (Théorème 2.5), on a $\lim_{n\to\infty} x_n = c$. Par la continuité de f en c et le critère séquentiel de la continuité (Théorème 4.14), on a $f(c) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$. Puisque $f(x_n) < y$ pour tout n, on a $f(c) \leq y$ (Proposition 2.12). Comme $f(b) > y$, on a $c \neq b$, et donc $c < b$. Soit $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite telle que $c < b_n \leq b$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $c = \lim_{n\to\infty} b_n$. Puisque c est une borne supérieure de E, on a $b_n \notin E$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc $f(b_n) \geq y$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par conséquent, $f(c) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) \geq y$. On a donc $f(c) \geq y$ et $f(c) \leq y$, ce qui implique que $f(c) = y$. ☐

Exemple 4.26. Montrer que le polynôme $x^5 + 2x + 1$ a une racine dans l'intervalle $(-1,0)$.

Solution. Soit

$$f : [-1,0] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^5 + 2x + 1.$$

La fonction f est continue car tout polynôme est continu (Exemple 4.13). On a $f(-1) = -1 - 2 + 1 = -2$ et $f(0) = 1$, donc $f(-1) < 0 < f(0)$. Par le théorème des valeurs intermédiaires (Théorème 4.25), il existe $c \in (-1,0)$ tel que $f(c) = 0$. ☐

Proposition 4.27. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment $[a,b]$. Alors, $f([a,b])$ est un segment.*

Démonstration. Par le théorème des valeurs extrêmes (Théorème 4.23), l'ensemble $f([a,b])$ a un minimum $m = f(x_{\min})$ et un maximum $M = f(x_{\max})$. Montrons que $f([a,b]) = [m,M]$. On a $f([a,b]) \subseteq [m,M]$ car $m = f(x_{\min}) \leq f(x) \leq f(x_{\max}) = M$ pour tout $x \in [a,b]$. Pour montrer que $[m,M] \subseteq f([a,b])$, soit $y \in [m,M]$. Si $y = m$ alors $y = f(x_{\min}) \in f([a,b])$, et si $y = M$ alors $y = f(x_{\max}) \in f([a,b])$. On peut donc supposer que $m < y < M$, c'est-à-dire $f(x_{\min}) < y < f(x_{\max})$. Par le théorème des valeurs intermédiaires (Théorème 4.25), il existe c entre $x_{\min}$ et $x_{\max}$ tel que $f(c) = y$. Donc $y \in f([a,b])$. ☐

4.4 Continuité uniforme

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Par définition, pour chaque $x_0 \in D$ et $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ pour tout $x \in D$ satisfaisant $|x - x_0| < \delta$. Notez que, a priori, le nombre δ peut dépendre à la fois de ε et de x_0. Par exemple, dans l'Exemple 4.3 avec $f(x) = x^2$, on a pris $\delta = \min(1, \frac{\varepsilon}{1+2|x_0|})$. Il est parfois utile de pouvoir choisir un δ uniformément, indépendamment du point x_0, c'est-à-dire :

Définition 4.28. Une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est ***uniformément continue*** si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un nombre $\delta > 0$ tel que pour tous $x, y \in D$ satisfaisant $|x - y| < \delta$, on a $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Il est clair qu'une fonction uniformément continue est continue.

Exemple 4.29. Montrons que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ n'est pas uniformément continue. Intuitivement, cela correspond au fait que f croit de plus en plus vite quand $x \to \infty$, et donc plus x est grand, plus il faut choisir un petit δ. Pour le démontrer, supposons, au contraire, que f est uniformément continue. En posant $\varepsilon = 1$, il existe $\delta > 0$ tel que si $|x - y| < \delta$, alors $|x^2 - y^2| < \varepsilon$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $y = x + \frac{\delta}{2}$, on a $|x - y| = \frac{\delta}{2} < \delta$, et donc $|x^2 - y^2| < 1$. Puisque $|x^2 - y^2| = |x - y||x + y| = \frac{\delta}{2}|2x + \frac{\delta}{2}|$, ceci implique que $\frac{\delta}{2}|2x + \frac{\delta}{2}| < 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On obtient une contradiction en prenant, par exemple, $x = \frac{1}{\delta}$, car $\frac{\delta}{2}|2x + \frac{\delta}{2}| > \frac{\delta}{2}2x = \delta x = 1$.

La prochaine définition donne un critère important pour démontrer qu'une fonction est uniformément continue.

Définition 4.30. Une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est ***lipschitzienne*** s'il existe une constante $c \geq 0$ telle que

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y| \quad \text{pour tous } x, y \in D.$$

Proposition 4.31. *Toute fonction lipschitzienne est uniformément continue.*

Démonstration. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne de constante $c > 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Posons $\delta = \frac{\varepsilon}{c}$. Alors, pour tous $x, y \in D$ tels que $|x - y| < \delta$, on a $|f(x) - f(y)| \leq c|x - y| < c\delta = \varepsilon$. □

Dans la prochaine section, on montre que les fonctions trigonométriques sont lipschitziennes.

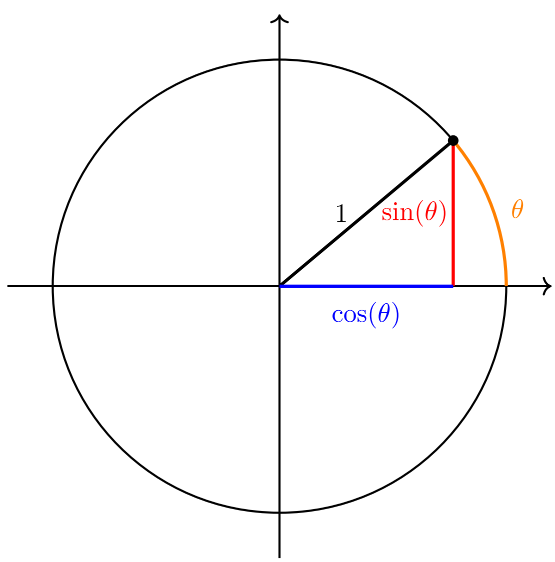
Proposition 4.32. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment $[a, b]$. Alors, f est uniformément continue.*

Démonstration. Supposons, au contraire, que f n'est pas uniformément continue. Alors, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\delta > 0$ il existe $x, y \in [a, b]$ tels que $|x - y| < \delta$ et $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$. En prenant $\delta = \frac{1}{n}$ où $n \in \mathbb{N}$, on obtient deux suites $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ et $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ dans $[a, b]$ telles que $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ et $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par le théorème de Bolzano–Weierstrass (Théorème 2.23), il existe une sous-suite $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ telle que $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = L$ existe. Puisque $|x_{n_k} - y_{n_k}| < \frac{1}{n_k} \leq \frac{1}{k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite $(y_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ converge aussi vers L (Exercice **(2.13)**). Par la continuité de f en L et le critère séquentiel de la continuité (Théorème 4.14), on a $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(L) = \lim_{k\to\infty} f(y_{n_k})$. Par conséquent, $\lim_{k\to\infty} (f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})) = 0$, contredisant que $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. □

Exemple 4.33. La fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ est continue (Exercice **(4.3)**) et donc uniformément continue. En revanche, cette fonction n'est pas lipschitzienne (Exercice **(4.12)**).

4.5 Fonctions trigonométriques

Les fonctions $\sin(\theta)$ et $\cos(\theta)$ sont définis géométriquement par les coordononnées d'un point d'arc θ sur le cercle unitaire :



Montrons que sin et cos sont des fonctions continues. Par leur définition géométrique, il est clair que

$$|\sin(\theta)| \leq 1, \quad |\cos(\theta)| \leq 1, \quad \text{pour tout } \theta \in \mathbb{R}. \tag{4.3}$$

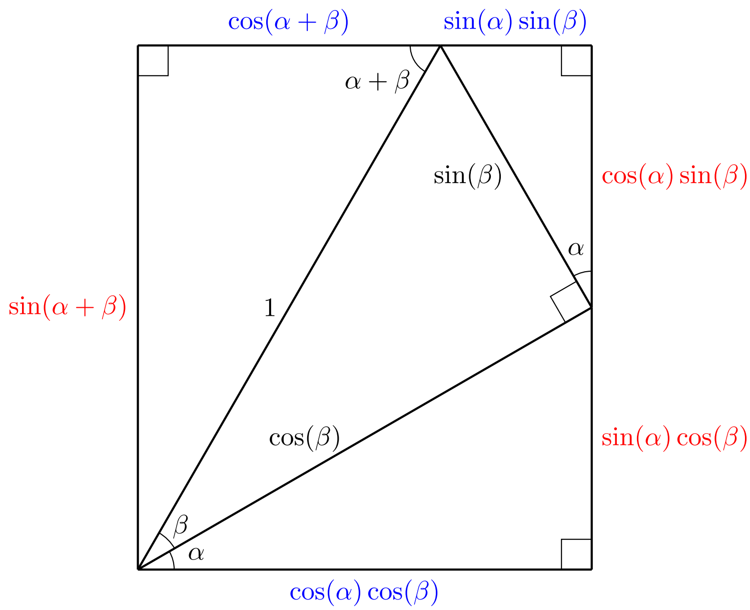
De plus, l'arc de cercle de longueur θ est plus long que la droite de longueur $\sin(\theta)$, donc $\sin(\theta) \leq \theta$ pour $\theta \geq 0$. Il s'ensuit que

$$|\sin(\theta)| \leq |\theta|, \quad \text{pour tout } \theta \in \mathbb{R}. \tag{4.4}$$

On peut aussi déduire géométriquement les identités trigonométriques

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta) \tag{4.5}$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta). \tag{4.6}$$

L'étudiante ou l'étudiant intéressé peut se convaincre de la validité de ces identités en examinant la figure suivante. (Ces identités peuvent aussi être obtenus par la formule d'Euler, sachant que $e^{i\alpha}e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$.)



De là, en posant $\alpha = \frac{x-y}{2}$ et $\beta = \frac{x+y}{2}$ dans (4.5), on obtient

$$\sin(x) = \sin(\tfrac{x-y}{2})\cos(\tfrac{x+y}{2}) + \cos(\tfrac{x-y}{2})\sin(\tfrac{x+y}{2}). \tag{4.7}$$

De même, en posant $\alpha = \frac{x+y}{2}$ et $\beta = \frac{y-x}{2}$ dans (4.5), on a

$$\sin(y) = \sin(\tfrac{x+y}{2})\cos(\tfrac{x-y}{2}) - \cos(\tfrac{x+y}{2})\sin(\tfrac{x-y}{2}). \tag{4.8}$$

En soustrayant (4.8) à (4.7), on a

$$\sin(x) - \sin(y) = 2\sin(\tfrac{x-y}{2})\cos(\tfrac{x+y}{2}).$$

Par conséquent,

$$|\sin(x) - \sin(y)| = 2|\sin(\tfrac{x-y}{2})||\cos(\tfrac{x+y}{2})| \leq 2|\tfrac{x-y}{2}| = |x-y|,$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}$. Il s'ensuit que la fonction sin est lipschitzienne de constante $c = 1$, et donc uniformément continue (Proposition 4.31).

Une analyse similaire avec l'identité

$$\cos(x) - \cos(y) = -2\sin(\tfrac{x+y}{2})\sin(\tfrac{x-y}{2})$$

montre que $\cos(x)$ est aussi lipschitzienne.

On a donc :

Théorème 4.34. *Les fonctions trigonométriques*

$$\sin : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad et \quad \cos : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

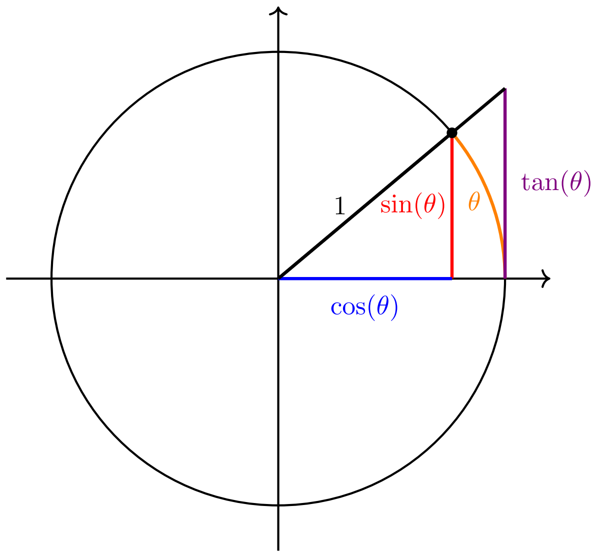
sont uniformément continues. □

Continuons de déduire quelques propriétés utiles des fonctions trigonométriques. On définit la fonction tangente

$$\tan(\theta) := \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)},$$

si $\cos(\theta) \neq 0$. La figure suivante montre que

$$|\theta| \leq |\tan(\theta)|, \quad \text{pour tout } -\tfrac{\pi}{2} < \theta < \tfrac{\pi}{2}.$$



En effet, l'aire du triangle aux sommets $(0,0)$, $(1,0)$, et $(1, \tan(\theta))$ est $\frac{\tan(\theta)}{2}$, tandis que l'aire de la portion du disque d'arc θ est $\frac{\theta}{2}$.

Il sera utile plus tard de connaître les limites suivantes.

Exemple 4.35. Montrer que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Solution. Par (4.4), on a $|\sin(x)| \leq |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc $\frac{\sin(x)}{x} \leq 1$ pour tout $x \neq 0$. Puisque $|x| \leq |\tan(x)| = |\frac{\sin(x)}{\cos(x)}|$, on a

$$\cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1, \quad \text{pour tout } x \neq 0 \text{ tel que } -\tfrac{\pi}{2} < x < \tfrac{\pi}{2}.$$

Puisque $\cos(x)$ est continue, on a $\lim_{x\to 0} \cos(x) = \cos(0) = 1$. Par le théorème du sandwich (Théorème 4.6), $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$. □

Exemple 4.36. Montrer que

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x} = 0.$$

Solution. Puisque $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$, on a

$$(1-\cos(x))(1+\cos(x)) = 1 - \cos^2(x) = \sin^2(x),$$

donc

$$\frac{1-\cos(x)}{x} = \frac{\sin^2(x)}{x(1+\cos(x))} = \frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}.$$

Puisque sin et cos sont continues, la fonction $\frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}$ est continue au point $x = 0$, et donc $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)} = \frac{\sin(0)}{1+\cos(0)} = 0$. Puisque $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, on a $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x} = 1 \cdot 0 = 0$. □

4.6 Exercices

(4.1) Montrer que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{x} = \frac{1}{x_0}$$

pour tout $x_0 > 0$ directement à partir de la Définition 4.1.

(4.2) Montrer que la limite

$$\lim_{x \to 0} \cos(\tfrac{1}{x})$$

n'existe pas. (Indice : utiliser le critère séquentiel de la limite (Théorème 4.4).)

(4.3) Montrer que la fonction $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ est continue. (Indice : $\sqrt{x} - \sqrt{x_0} = \frac{x - x_0}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}$.)

(4.4) Démontrer les parties (b), (c) et (d) du Théorème 4.5.

(4.5) Montrer que la fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = |x|$$

est continue.

(4.6) Montrer que la fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x > 0 \\ 1 - x^2 & \text{si } x \le 0 \end{cases}$$

est discontinue.

(4.7) Montrer que la fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x \cos(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est continue.

(4.8) Soit $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim_{x \to b} f(x) = L$. Montrer que la fonction

$$g : (a, b] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in (a, b) \\ L & \text{si } x = b \end{cases}$$

est continue.

(4.9) Soit $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ une fonction sur un intervalle ouvert (a, b) et soit $x_0 \in (a, b)$ tel que $\lim_{x \to x_0} f(x) = L > 0$. Montrer qu'il existe un intervalle ouvert (c, d) inclus dans (a, b) tel que $x_0 \in (c, d)$ et $f(x) > 0$ pour tout $x \in (c, d)$, $x \neq x_0$.

(4.10) Démontrer le Théorème 4.6.

(4.11) Compléter la démonstration du Théorème 4.23.

(4.12) Montrer que la fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ n'est pas lipschitzienne.

(4.13) Soient $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ et $g : [b, c] \to \mathbb{R}$ des fonctions continues telles que $f(b) = g(b)$. Montrer que la fonction

$$h : [a, c] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [a, b] \\ g(x) & \text{si } x \in [b, c] \end{cases}$$

est continue.

(4.14) Soit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Montrer que

$$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) = \max(f(x), g(x))$$

est continue.

(4.15) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = f(1)$. Montrer qu'il existe $a, b \in [0,1]$ tels que $|a-b| = \frac{1}{2}$ et $f(a) = f(b)$. (Indice : Soit $g : [0, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - f(\frac{1}{2} + x)$. Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.)

(4.16) Montrer que le polynôme $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x - 1$ a une racine dans l'intervalle $(1, 2)$.

(4.17) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction ***périodique***, c'est-à-dire, il existe $T > 0$ tel que $f(x) = f(x+T)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que si f est continue, alors elle atteint un minimum et un maximum.

(4.18) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique (voir Exercice **(4.17)**) et continue. Montrer que f est uniformément continue.

(4.19) Montrer que la fonction $f : [1, \infty)$, $f(x) = \sqrt{x}$ est uniformément continue.

(4.20) Soit $a < b < c$ et $f : (a, c) \to \mathbb{R}$ une fonction telle que les restriction $f|_{(a,b]} : (a, b] \to \mathbb{R}$ et $f|_{[b,c)} : [b, c) \to \mathbb{R}$ sont uniformément continue. Montrer que f est uniformément continue.

(4.21) Soit $f : [0, 1) \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim_{x\to 1} f(x)$ existe. Montrer que f est uniformément continue.

(4.22) Soient $f, g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions uniformément continues. Montrer que $f + g$ est uniformément continue.

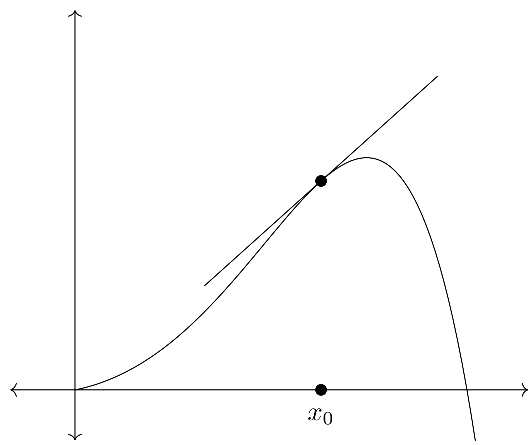
(4.23) Montrer qu'un polynôme de degré trois a au moins une racine.

Chapitre 5

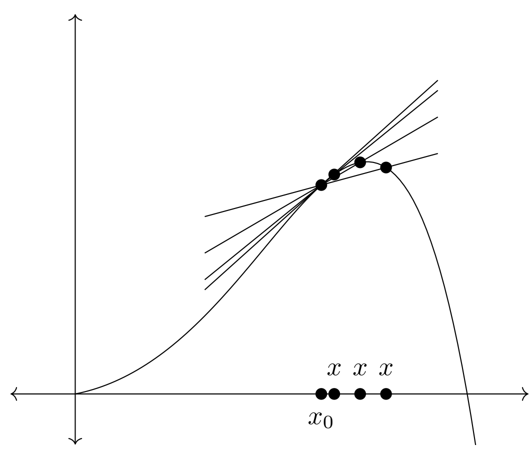
Dérivation

5.1 Définition de la dérivée

Intuitivement, la dérivée d'une fonction f au point x_0 peut être vue comme la pente de la droite tangente au graphe de f au point $(x_0, f(x_0))$.



Cette définition géométrique donne une bonne intuition à ce concept, mais elle n'est pas satisfaisante en analyse réelle, car elle n'est pas assez précise. On doit la définir plus formellement pour établir une théorie solide et rigoureuse de la dérivée. Pour y arriver, observons d'abord que si x est un autre point près de x_0, alors la pente de la droite passant par $(x_0, f(x_0))$ et $(x, f(x))$ s'approche de la droite tangente plus x est près de x_0.



Contrairement à la pente de la droite tangente, que nous cherchons à définir, la pente de la droite passant par $(x_0, f(x_0))$ et $(x, f(x))$ peut être calculée explicitement par une formule simple :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Puisqu'on s'attend à ce que cette pente soit une bonne approximation de la pente de la droite tangente quand x est près de x_0, il est naturel de définir la dérivée comme la limite de ces pentes quand x tend vers x_0 :

Définition 5.1. Une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est ***différentiable au point*** $x_0 \in D$ si la limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe. Dans ce cas, la limite est notée $f'(x_0)$, ou $\frac{df}{dx}(x_0)$, et est appelée la ***dérivée*** de f au point x_0. La fonction est ***différentiable*** si elle est différentiable en tout point $x_0 \in D$. On écrit $f^{(2)} = f''$, $f^{(3)} = f'''$, etc., si ces dérivées existent. On dit que f est ***infiniment différentiable*** si $f^{(k)}$ existe pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Remarque 5.2. On a

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Il est parfois utile d'exprimer la dérivée comme le côté droit.

Exemple 5.3. Montrer que toute droite

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = ax + b$$

est différentiable et que $f'(x) = a$.

Solution. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On a

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{(ax + b) - (ax_0 + b)}{x - x_0} = \frac{a(x - x_0)}{x - x_0} = a,$$

donc

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a,$$

c'est-à-dire, $f'(x_0) = a$. □

Exemple 5.4. Montrer que la fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2$$

est différentiable et trouver sa dérivée.

Solution. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On a

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = x + x_0.$$

Donc

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} (x + x_0) = 2x_0,$$

c'est-à-dire, $f'(x_0) = 2x_0$. □

Exemple 5.5. Montrer que les fonctions trigonométriques

$$\sin : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \cos : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

sont différentiables et que

$$\sin'(x) = \cos(x) \quad \text{et} \quad \cos'(x) = -\sin(x).$$

Démonstration. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} \frac{\sin(x) - \sin(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x_0 + h) - \sin(x_0)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x_0)\cos(h) + \cos(x_0)\sin(h) - \sin(x_0)}{h} && \text{(par (4.5))} \\
&= \lim_{h \to 0} \left(\sin(x_0) \frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(x_0) \frac{\sin(h)}{h} \right) \\
&= \sin(x_0) \cdot 0 + \cos(x_0) \cdot 1 && \text{(Exemples 4.35 et 4.36)} \\
&= \cos(x_0).
\end{aligned}$$

Donc sin est différentiable en x_0 et $\sin'(x_0) = \cos(x_0)$. Un argument similaire montre que $\cos'(x_0) = -\sin(x_0)$ (Exercice **(5.5)**). $\square$

5.2 Propriétés de la dérivée

Proposition 5.6. *Si une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est différentiable au point $x_0 \in D$, alors elle est continue au point x_0. En particulier, toute fonction différentiable est continue.*

Démonstration. On a

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) + f(x_0) \right) = f'(x) \cdot 0 + f(x_0) = f(x_0),$$

donc f est continue en x_0 par la Proposition 4.9. $\square$

En revanche, une fonction continue n'est pas nécessairement différentiable :

Exemple 5.7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$. Cette fonction est continue (Exercice **(4.5)**). Montrer qu'elle n'est pas différentiable au point 0.

Solution. Pour tout $x \neq 0$, on a

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \operatorname{sgn}(x).$$

La limite de $\operatorname{sgn}(x)$ au point 0 n'existe pas (voir la solution de l'Exemple 4.11), donc f n'est pas différentiable au point 0. $\square$

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable au point $x_0 \in D$. La ***tangente*** de f au point x_0 est la droite de pente $f'(x_0)$ passant par $(x_0, f(x_0))$, c'est-à-dire,

$$T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

La propriété fondamentale de la dérivée est que cette tangente est une bonne approximation de f près de x_0 :

Théorème 5.8. *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable au point $x_0 \in D$. Alors, il existe une fonction $\varepsilon : D \to \mathbb{R}$ continue au point x_0 telle que $\varepsilon(x_0) = 0$ et*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \varepsilon(x)(x - x_0), \qquad \textit{pour tout } x \in D. \tag{5.1}$$

Par conséquent, il existe une fonction $\varphi : D \to \mathbb{R}$ telle que φ est continue en x_0, $\varphi(x_0) = f'(x_0)$, et

$$f(x) = f(x_0) + \varphi(x)(x - x_0).$$

De plus, si f est continue sur D, alors ε et φ le sont aussi.

Démonstration. Soit T la tangente de f au point x_0 et soit

$$\varepsilon : D \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-T(x)}{x-x_0} & \text{si } x \neq x_0 \\ 0 & \text{si } x = x_0. \end{cases}$$

La fonction ε satisfait (5.1) et est continue au point x_0 si et seulement si $\lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = \varepsilon(x_0)$ (Proposition 4.9). Pour tout $x \neq x_0$, on a

$$\varepsilon(x) = \frac{f(x) - T(x)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0),$$

donc

$$\lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0 = \varepsilon(x_0),$$

et ε est continue en x_0. On définit alors $\varphi(x) = f'(x) + \varepsilon(x)$. □

Remarque 5.9. L'interprétation de ce théorème est que, puisque la fonction ε est continue au point x_0 et que $\varepsilon(x_0) = 0$, on a que $\varepsilon(x)$ est très petit près de x_0, et donc $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ près de x_0.

En plus de donner une intuition géométrique de la dérivée, le précédent théorème est utile pour de nombreuses démonstrations. Entre autres :

Théorème 5.10 (Théorème de dérivation des fonctions composées)**.** *Soient $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : E \to \mathbb{R}$ des fonctions telles que $f(x) \in E$ pour tout $x \in D$. Si f est différentiable en x_0 et g est différentiable en $f(x_0)$, alors la composition $g \circ f : D \to \mathbb{R}$ est différentiable en x_0, et*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Démonstration. Grace au Théorème 5.8, on peut écrire $f(x) = f(x_0) + \varphi(x)(x - x_0)$, où $\varphi : D \to \mathbb{R}$ est continue en x_0 et $\varphi(x_0) = f'(x_0)$. De même, soit $y_0 = f(x_0)$, on a $g(y) = g(y_0) + \psi(y)(y - y_0)$, où $\psi : E \to \mathbb{R}$ est continue en y_0 et $\psi(y_0) = g'(y_0)$. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(y_0) + \psi(f(x))(f(x) - y_0) \\ &= g(f(x_0)) + \psi(f(x))(f(x) - f(x_0)) \\ &= g(f(x_0)) + \psi(f(x))\varphi(x)(x - x_0), \end{aligned}$$

et donc

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \psi(f(x))\varphi(x)$$

pour tout $x \in D$. Puisqu'une composition et un produit de fonctions continues sont continues (théorèmes 4.18 et 4.12), on a que $\psi(f(x))\varphi(x)$ est continue en x_0. Par conséquent,

$$\lim_{x\to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \psi(f(x))\varphi(x) = \psi(f(x_0))\varphi(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$ □

Théorème 5.11. *Soient $f, g : D \to \mathbb{R}$ des fonctions différentiables en x_0.*

(a) *$f + g$ est différentiable en x_0 et $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.*

(b) *Pour tout $c \in \mathbb{R}$, cf est différentiable en x_0 et $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$.*

(c) *fg est différentiable en x_0, et*

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

(d) *Si $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in D$, alors $\frac{f}{g}$ est différentiable en x_0 et*

$$(\tfrac{f}{g})'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

Démonstration. On utilise le Théorème 5.8, de manière similaire à la démonstration du Théorème 5.10. La démonstration est laissée en exercice. $\square$

Exemple 5.12. La fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x\cos(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est continue (Exercice **(4.7)**). Calculer sa dérivée pour $x \neq 0$ et montrer qu'elle n'est pas différentiable en $x = 0$.

Solution. Pour $x \neq 0$, on utilise, d'une part, la règle du produit (Théorème 5.11(c)) avec x et $\cos(\frac{1}{x})$, et d'autre part le théorème de dérivation des fonctions composées (Théorème 5.10) pour $\cos(\frac{1}{x})$. On obtient,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}\left(x\cos(\tfrac{1}{x})\right) \\ &= \left(\frac{d}{dx}x\right)\cos(\tfrac{1}{x}) + x\left(\frac{d}{dx}\cos(\tfrac{1}{x})\right) \\ &= 1\cdot\cos(\tfrac{1}{x}) + x\left(-\sin(\tfrac{1}{x})\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\ &= \cos(\tfrac{1}{x}) + x\left(-\sin(\tfrac{1}{x})\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &= \cos(\tfrac{1}{x}) + \tfrac{1}{x}\sin(\tfrac{1}{x}). \end{aligned}$$

Ce calcul n'est pas valide pour $x = 0$. On a

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0}\cos(\tfrac{1}{x}),$$

et cette limite n'existe pas (Exercice **(4.2)**). Par conséquent, f n'est pas différentiable en $x = 0$. $\square$

5.3 Théorème des accroissements finis

Le prochain résultat est un des fondements du calcul différentiel : la dérivée permet de localiser les points extrêmes d'une fonction.

Théorème 5.13 (Théorème de Fermat)**.** *Soit $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ une fonction continue atteignant un minimum ou un maximum à un point $x_0 \in (a, b)$. Si f est différentiable en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.*

Démonstration. Démontrons le cas où x_0 est un maximum ; le cas où x_0 est un minimum est démontré de manière semblable. On doit montrer que $f'(x_0) = 0$. Si $f'(x_0) > 0$, alors

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0.$$

Donc, soit $\varepsilon = f'(x_0)$, par la définition de la limite, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0)\right| < \varepsilon = f'(x_0) \quad \text{pour tout } x \in (a, b) \text{ tel que } 0 < |x - x_0| < \delta.$$

Il s'ensuit que

$$0 < \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 2f'(x_0) \quad \text{pour tout } x \in (a, b) \text{ tel que } 0 < |x - x_0| < \delta.$$

En particulier, pour tout $x \in (a, b)$ tel que $x_0 < x < x_0 + \delta$, on a

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \quad \Longrightarrow \quad f(x) > f(x_0),$$

contredisant que $f(x_0)$ est un maximum de f. De même, si $f'(x_0) < 0$, alors il existe $\delta > 0$ tel que

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0 \quad \text{pour tout } x \in (a, b) \text{ tel que } 0 < |x - x_0| < \delta.$$

Il s'ensuit que si $x \in (a, b)$ est tel que $x_0 - \delta < x < x_0$, alors

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \quad \Longrightarrow \quad f(x) > f(x_0),$$

contredisant que $f(x_0)$ est un maximum de f. Par conséquent, $f'(x_0) = 0$. □

Théorème 5.14 (Théorème de Rolle)**.** *Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ telle que $f(a) = f(b) = 0$. Si f est différentiable sur (a, b), alors il existe un nombre $c \in (a, b)$ tel que $f'(c) = 0$.*

Démonstration. Par le théorème des valeurs extrêmes (Théorème 4.23), f atteint un minimum $f(x_{\min})$ et un maximum $f(x_{\max})$. Si $f(x_{\min}) = f(x_{\min}) = 0$, alors f est constante et l'on peut prendre n'importe quel point $c \in (a, b)$. Si non, soit $f(x_{\min}) < 0$, ou $f(x_{\max}) > 0$. Si $f(x_{\min}) < 0$, alors $x_{\min} \in (a, b)$ et donc $f'(x_{\min}) = 0$ par le théorème de Fermat (Théorème 5.13). Dans ce cas, on peut donc prendre $c = x_{\min}$. De même, si $f(x_{\max}) > 0$, on a $x_{\max} \in (a, b)$ et $f'(x_{\max}) = 0$, donc on prend $c = x_{\max}$. □

Le prochain théorème est un outil indispensable de l'analyse réelle.

Théorème 5.15 (Théorème des accroissements finis)**.** *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et différentiable sur (a, b). Alors, il existe un nombre $c \in (a, b)$ tel que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Démonstration. Soit $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la droite passant par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$, c'est-à-dire

$$L(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$

La fonction $g(x) = f(x) - L(x)$ satisfait alors les hypothèses du théorème de Rolle (Théorème 5.14), donc il existe $c \in (a, b)$ tel que $g'(c) = 0$. Puisque $L'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, on a $g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$. □

Exemple 5.16. Dans l'Exemple 4.26, on a montré que le polynôme $x^5 + 2x + 1$ a une racine dans l'intervalle $(-1, 0)$. Montrer que cette racine est unique.

Solution. Soit $f : [-1, 0] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^5 + 2x + 1$. Supposons qu'il existe deux nombres $a, b \in (-1, 0)$ tels que $a < b$ et $f(a) = 0$ et $f(b) = 0$. Par le théorème des accroissements finis (Théorème 5.15), il existe $c \in (a, b)$ tel que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$. Mais $f'(x) = 5x^4 + 2 \geq 2$ pour tout x, donc f' n'a pas de racine, contredisant que $f'(c) = 0$. Par conséquent, la racine est unique. □

Montrons deux applications du théorème des accroissements finis.

Théorème 5.17. *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est différentiable et $f' : [a, b] \to \mathbb{R}$ est bornée, alors f est lipschitzienne.*

Démonstration. Soit $M > 0$ tel que $|f'(x)| \leq M$ pour tout $x \in [a, b]$. Soit $x, y \in [a, b]$ tels que $x < y$. Alors f est différentiable sur $[x, y]$, donc, par théorème des accroissements finis (Théorème 5.15), il existe $c \in (x, y)$ tel que $f'(c) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$. Il s'ensuit que $|f(x) - f(y)| = |f'(c)||x - y| \leq M|x - y|$. □

Exemple 5.18. Montrer que la fonction $f : [0, \frac{\pi}{3}] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\cos(x)}$ est lipschitzienne.

Solution. On a $f'(x) = -\frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$. La fonction $-\frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$ est continue sur $[0, \frac{\pi}{3}]$, et donc bornée (Théorème 4.21). Par le Théorème 5.17, f est lipschitzienne. □

Définition 5.19. Une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est ***croissante*** si $f(x) \leq f(y)$ pour tous $x < y$, ***strictement croissante*** si $f(x) < f(y)$ pour tous $x < y$, ***décroissante*** si $f(x) \geq f(y)$ pour tous $x < y$, et ***strictement décroissante*** si $f(x) > f(y)$ pour tous $x < y$. Une fonction est ***monotone*** si elle est croissante ou décroissante.

Théorème 5.20. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et différentiable sur (a, b).*

(1) *Si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in (a, b)$, alors f est croissante.*

(2) *Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in (a, b)$, alors f est strictement croissante.*

(3) *Si $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in (a, b)$, alors f est décroissante.*

(4) *Si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in (a, b)$, alors f est strictement décroissante.*

(5) *Si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in (a, b)$, alors f est constante.*

Démonstration. Montrons (1) ; les autres parties sont laissées en exercice (Exercice **(5.4)**). Soient $x, y \in [a, b]$ tels que $x < y$. Par le théorème des accroissements finis (Théorème 5.15) appliqué à la restriction de f sur $[x, y]$, il existe $c \in (x, y)$ tel que $f'(c) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$. Puisque $y - x > 0$ et $f'(c) \geq 0$, on a $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) \geq 0$, donc $f(x) \leq f(y)$. □

Le théorème des accroissements finis est aussi utile pour obtenir des approximations de fonctions.

Exemple 5.21. Soit la fonction

$$f : [0, \tfrac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin(x).$$

Pour tout $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$, le théorème des accroissements finis (Théorème 5.15) appliqué à $[0, x]$ donne un point $c \in (0, x)$ tel que

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sin(x)}{x} = f'(c) = \cos c < 1.$$

On retrouve donc l'inégalité

$$\sin x < x \quad \text{pour tout } 0 < x \leq \tfrac{\pi}{2}.$$

Soit $g(x) = 1 - \frac{x^2}{2} - \cos(x)$, pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Par le théorème des accroissements finis, pour tout $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$, on a un point $c \in (0, x)$ tel que

$$\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \frac{1 - \frac{x^2}{2} - \cos(x)}{x} = g'(c) = \sin(c) - c < 0.$$

Donc

$$1 - \frac{x^2}{2} < \cos(x), \quad \text{pour tout } 0 < x \leq \tfrac{\pi}{2}.$$

Maintenant, soit $h(x) = \sin(x) - x + \frac{x^3}{6}$. Par le théorème des accroissements finis, on a un point $c \in (0, x)$ tel que

$$\frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \frac{\sin(x) - x + \frac{x^3}{6}}{x} = h'(c) = \cos(c) - 1 + \frac{c^2}{2} > 0.$$

Il s'ensuit que

$$x - \frac{x^3}{6} < \sin(x) < x, \quad \text{pour tout } x \in (0, \tfrac{\pi}{2}].$$

5.4 Exercices

(5.1) Montrer que tout polynôme est différentiable et trouver sa dérivée.

(5.2) Démontrer le Théorème 5.11.

(5.3) Montrer que la fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est différentiable sur $\mathbb{R}$ et trouver f'.

(5.4) Compléter la démonstration du Théorème 5.20.

(5.5) Montrer que la fonction cos est différentiable et que $\cos'(x) = -\sin(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(5.6) Soient f et g des fonctions différentiables sur (a, b) telles que $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in (a, b)$. Soit $x_0 \in (a, b)$ un point tel que $f(x_0) = g(x_0)$. Montrer que $f'(x_0) = g'(x_0)$.

(5.7) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique (Exercice **(4.17)**). Montrer que si f est différentiable, alors f' est aussi périodique. [Indice : Utiliser le théorème de dérivation des fonctions composées.]

(5.8) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue au point $x = 0$. Montrer que la fonction $f(x) = xg(x)$ est différentiable au point $x = 0$.

(5.9) Soient f et g des fonctions différentiables sur $[a, b]$ telles que $f'(x) = g'(x)$ pour tout $x \in (a, b)$. Montrer que $g(x) = f(x) + c$ pour une constante $c \in \mathbb{R}$.

(5.10) Montrer que le polynôme $1 - 2x - x^3 - x^5$ a exactement une racine réelle.

(5.11) Montrer qu'il existe un unique nombre réel x tel que $\cos(x) = 2x$.

(5.12) Soit $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ une fonction telle que f', f'', et f''' existent. Montrer que si f a quatre racines, alors f''' au moins une racine.

(5.13) Montrer que la fonction

$$f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est lipschitzienne.

(5.14) Montrer que $1 - \frac{x^2}{2} < \cos(x) < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ pour tout $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$.

(5.15) Montrer que la fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

est différentiable au point $x = 0$, et n'est pas différentiable en tout autre point.

Chapitre 6

Intégration

Le but de ce chapitre est de définir l'intégrale

$$\int_a^b f(x)dx$$

d'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ et de démontrer certaines propriétés. Entre autres, on démontrera le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral, reliant les notions d'intégration et de différentiation et permetant de calculer des intégrales avec la formule

$$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a).$$

6.1 Définition de l'intégrale

Définition 6.1. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée (Définition 4.20). Une ***partition*** du segment $[a, b]$ est un ensemble fini $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, où

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b.$$

Pour chaque $i = 1, \ldots, n$, on note

$$\begin{aligned} M_i(f, P) &\coloneqq \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \\ m_i(f, P) &\coloneqq \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}. \end{aligned}$$

La ***somme de Riemann supérieure*** est

$$\overline{S}(f, P) \coloneqq \sum_{i=1}^{n} M_i(f, P)(x_i - x_{i-1})$$

et la ***somme de Riemman inférieure*** est

$$\underline{S}(f, P) \coloneqq \sum_{i=1}^{n} m_i(f, P)(x_i - x_{i-1}).$$

Puisque $m_i(f, P) \le M_i(f, P)$ pour tout i, on a

$$\underline{S}(f, P) \le \overline{S}(f, P).$$

On dit qu'une partition Q est un ***raffinement*** de P si $P \subseteq Q$.

Proposition 6.2. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée, soit P une partition de $[a, b]$, et soit Q un raffinement de P. Alors,*

$$\underline{S}(f, P) \le \underline{S}(f, Q) \quad \text{et} \quad \overline{S}(f, Q) \le \overline{S}(f, P).$$

Démonstration. Chaque intervalle $[x_{i-1}, x_i]$ de P est subdivisé par Q en sous-intervalles

$$[t_k, t_{k+1}], [t_{k+1}, t_{k+2}], \dots, [t_{l-1}, t_l],$$

où $x_{i-1} = t_k < \cdots < t_l = x_i$. Donc, pour chaque j tel que $k+1 \leq j \leq l$, on a

$$m_i(f, P) = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \leq \inf\{f(t) : t \in [t_{j-1}, t_j]\} = m_j(f, Q).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} m_i(f,P)(x_i - x_{i-1}) &= m_i(f,P) \sum_{j=k+1}^{l} (t_j - t_{j-1}) \\ &= \sum_{j=k+1}^{l} m_i(f,P)(t_j - t_{j-1}) \\ &\leq \sum_{j=k+1}^{l} m_j(f,Q)(t_j - t_{j-1}). \end{aligned}$$

En sommant sur chaque intervalle de P, on a alors $\underline{S}(f, P) \leq \underline{S}(f, Q)$. Un argument similaire montre que $\overline{S}(f, Q) \leq \overline{S}(f, P)$. □

Proposition 6.3. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée et soient P et Q deux partitions de $[a, b]$. On a*

$$\underline{S}(f, P) \leq \overline{S}(f, Q).$$

Démonstration. La partition $R = P \cup Q$ est un raffinement commun de P et Q, donc par la Proposition 6.2, on a

$$\underline{S}(f, P) \leq \underline{S}(f, R) \leq \overline{S}(f, R) \leq \overline{S}(f, Q).$$ □

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée, soit

$$A \coloneqq \{\underline{S}(f, P) : P \text{ est une partition de } [a, b]\} \tag{6.1}$$

l'ensemble de toutes les sommes de Riemann inférieures de f, et soit

$$B \coloneqq \{\overline{S}(f, P) : P \text{ est une partition de } [a, b]\} \tag{6.2}$$

l'ensemble de toutes les sommes de Riemann supérieure de f. La Proposition 6.3 implique que $a \leq b$ pour tout $a \in A$ et $b \in B$. En particulier, A est borné supérieurement, B est borné inférieurement, et $\sup(A) \leq \inf(B)$ (Proposition 1.14). Autrement dit, on peut définir

$$\begin{aligned} \underline{S}(f) &\coloneqq \sup\{\underline{S}(f, P) : P \text{ est une partition de } [a, b]\} \\ \overline{S}(f) &\coloneqq \inf\{\overline{S}(f, P) : P \text{ est une partition de } [a, b]\}. \end{aligned}$$

et on a

$$\underline{S}(f) \leq \overline{S}(f).$$

Définition 6.4. Une fonction bornée $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est ***intégrable*** si

$$\underline{S}(f) = \overline{S}(f).$$

Dans ce cas, on dénote cette valeur commune par

$$\int_a^b f(x)dx.$$

On défini aussi

$$\int_b^a f(x)dx \coloneqq -\int_a^b f(x)dx$$

et

$$\int_c^c f(x)dx = 0, \quad \text{pour tout } c \in [a, b].$$

Exemple 6.5. Montrer que la fonction constante

$$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = c$$

est intégrable et que

$$\int_a^b f(x)dx = c(b-a).$$

Solution. Soit $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ une partition de $[a,b]$. On a

$$M_i(f,P) = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} = c$$

et

$$m_i(f,P) = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} = c$$

pour tout i. Donc

$$\overline{S}(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(f,P)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} c(x_i - x_{i-1}) = c(b-a)$$

et

$$\underline{S}(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(f,P) = c(b-a).$$

Il s'ensuit que $\underline{S}(f) = c(b-a) = \overline{S}(f)$, donc f est intégrable et $\int_a^b f(x)dx = c(b-a)$. $\square$

Exemple 6.6. Montrer que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, la fonction

$$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

(voir Exemple 4.16) n'est pas intégrable.

Solution. Soit $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ une partition de $[a,b]$. Par la densité des nombres rationnels et irrationnels (Section 2.6), tout intervalle $[x_{i-1}, x_i]$ contient un nombre rationnel et irrationnel. Par conséquent, $M_i(f,P) = 1$ et $m_i(f,P) = 0$ pour tout i. Il s'ensuit que $\overline{S}(f,P) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = b - a$ et $\underline{S}(f,P) = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot (x_i - x_{i-1}) = 0$. Donc $\overline{S}(f) = b - a$ et $\underline{S}(f) = 0$. Puisque $\overline{S}(f) \neq \underline{S}(f)$, la fonction f n'est pas intégrable. $\square$

6.2 Critères d'intégrabilité

Théorème 6.7 (Critère de Riemann). *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. Alors, f est intégrable si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une partition P de $[a,b]$ telle que $\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) < \varepsilon$.*

Démonstration. ($\Longrightarrow$) Supposons que f est intégrable. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $S = \int_a^b f(x)dx = \underline{S}(f) = \overline{S}(f)$. On a $S - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{S}(f)$, et $\underline{S}(f)$ est la plus petite borne supérieure de l'ensemble (6.1), donc $S - \frac{\varepsilon}{2}$ n'est pas une borne supérieure (6.1). Il existe alors une partition P_1 telle que $S - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{S}(f, P_1)$. De même, $S + \frac{\varepsilon}{2}$ n'est pas une borne inférieure de l'ensemble (6.2), donc il existe une partition P_2 telle que $S + \frac{\varepsilon}{2} > \overline{S}(f, P_2)$. Soit $P = P_1 \cup P_2$. Alors P est un raffinement commun de P_1 et P_2, donc par la Proposition 6.2, on a

$$\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) \leq \overline{S}(f,P_2) - \underline{S}(f,P_1) < (S + \tfrac{\varepsilon}{2}) - (S - \tfrac{\varepsilon}{2}) = \varepsilon.$$

($\Longleftarrow$) Supposons que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partition P telle que $\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) < \varepsilon$. Puisque $\underline{S}(f,P) \leq \underline{S}(f)$ et $\overline{S}(f,P) \geq \overline{S}(f)$, on a

$$0 \leq \overline{S}(f) - \underline{S}(f) \leq \overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) < \varepsilon.$$

On a alors $0 \leq \overline{S}(f) - \underline{S}(f) < \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, et donc $\overline{S}(f) - \underline{S}(f) = 0$. $\square$

Théorème 6.8. *Toute fonction continue sur un segment $[a,b]$ est intégrable.*

Démonstration. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Par le Théorème 4.21, f est bornée. Montrons que f est intégrable par le critère de Riemann (Théorème 6.7). Soit $\varepsilon > 0$. Puisque toute fonction continue sur un segment est uniformément continue (Proposition 4.32), il existe $\delta > 0$ tel que $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ pour tous $x, y \in [a,b]$ tels que $|x - y| < \delta$. Soit $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ une partition de $[a,b]$ telle que $x_i - x_{i-1} < \delta$ pour tout i. Il s'ensuit que pour tous points x et y dans un intevalle commun $[x_{i-1}, x_i]$ de P, on a $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Puisque f est continue sur $[x_{i-1}, x_i]$, le théorème des valeurs extrêmes (Théorème 4.23) implique qu'il existe $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tel que $f(c_i) = M_i(f,P)$ et $d_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tel que $f(d_i) = m_i(f,P)$. On a donc $M_i(f,P) - m_i(f,P) = f(c_i) - f(d_i) < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Par conséquent,

$$\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) = \sum_{i=1}^{n} (M_i(f,P) - m_i(f,P))(x_i - x_{i-1}) < \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a}(x_i - x_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon.$$

Par le critère de Riemann (Théorème 6.7), f est intégrable. □

Bien que les fonctions continues forment une grande classe de fonctions intégrables, il n'est pas nécessaire d'être continu pour être intégrable :

Exemple 6.9. On a vu que la fonction

$$f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

est discontinue en $x = 0$ (Exemble 4.11). Montrons qu'elle est malgré tout intégrable en utilisant le critère de Riemann. Soit $\varepsilon > 0$. Soit P la partition de $[-1,1]$ donnée par

$$P = \{-1, -\tfrac{\varepsilon}{6}, \tfrac{\varepsilon}{6}, 1\}.$$

On a

$$\begin{aligned} \overline{S}(f,P) &= \left(\sup_{x \in [-1, -\frac{\varepsilon}{6}]} f(x) \right) (-\tfrac{\varepsilon}{6} - (-1)) + \left(\sup_{x \in [-\frac{\varepsilon}{6}, \frac{\varepsilon}{6}]} f(x) \right) (\tfrac{\varepsilon}{6} - \tfrac{-\varepsilon}{6}) + \left(\sup_{x \in [\frac{\varepsilon}{6}, 1]} f(x) \right) (1 - \tfrac{\varepsilon}{6}) \\ &= -1(-\tfrac{\varepsilon}{6} + 1) + 2\tfrac{\varepsilon}{6} + (1 - \tfrac{\varepsilon}{6}) \\ &= \tfrac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} \underline{S}(f,P) &= \left(\inf_{x \in [-1, -\frac{\varepsilon}{6}]} f(x) \right) (-\tfrac{\varepsilon}{6} - (-1)) + \left(\inf_{x \in [-\frac{\varepsilon}{6}, \frac{\varepsilon}{6}]} f(x) \right) (\tfrac{\varepsilon}{6} - \tfrac{-\varepsilon}{6}) + \left(\inf_{x \in [\frac{\varepsilon}{6}, 1]} f(x) \right) (1 - \tfrac{\varepsilon}{6}) \\ &= -1(-\tfrac{\varepsilon}{6} + 1) - 2\tfrac{\varepsilon}{6} + (1 - \tfrac{\varepsilon}{6}) \\ &= -\tfrac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) = \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} = \tfrac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

Par le critère de Riemann (Théorème 6.7), f est intégrable.

Proposition 6.10. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. Si f est continue sur (a,b), alors f est intégrable.*

Démonstration. On utilise le critère de Riemann. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $M > 0$ tel que $|f(x)| \leq M$ pour tout $x \in [a,b]$. La fonction f est continue sur $[a + \frac{\varepsilon}{8M}, b - \frac{\varepsilon}{8M}]$, et donc intégrable sur cet intervalle. Il existe alors une partition Q de $[a+\frac{\varepsilon}{8M}, b-\frac{\varepsilon}{8M}]$ telle que $\overline{S}(f,Q)-\underline{S}(f,Q)<\frac{\varepsilon}{2}$. Soit $P=\{a\}\cup Q\cup\{b\}$ la partition de $[a,b]$ obtenue en ajoutant a et b à Q. On a

$$\begin{aligned}\overline{S}(f,P) &= \sup\{f(x) : x\in[a,a+\tfrac{\varepsilon}{8M}]\}\frac{\varepsilon}{8M}+\overline{S}(f,Q)+\sup\{f(x) : x\in[b-\tfrac{\varepsilon}{8M},b]\}\frac{\varepsilon}{8M}\\ &\leq 2M\frac{\varepsilon}{8M}+\overline{S}(f,Q)=\frac{\varepsilon}{4}+\overline{S}(f,Q)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\underline{S}(f,P) &= \inf\{f(x) : x\in[a,a+\tfrac{\varepsilon}{8M}]\}\frac{\varepsilon}{8M}+\underline{S}(f,Q)+\inf\{f(x) : x\in[b-\tfrac{\varepsilon}{8M},b]\}\frac{\varepsilon}{8M}\\ &\geq -2M\frac{\varepsilon}{8M}+\underline{S}(f,Q)=-\frac{\varepsilon}{4}+\underline{S}(f,Q),\end{aligned}$$

donc

$$\overline{S}(f,P)-\underline{S}(f,P)\leq\frac{\varepsilon}{2}+\overline{S}(f,Q)-\underline{S}(f,Q)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Par le critère de Riemann, f est intégrable sur $[a,b]$. ☐

Exemple 6.11. Montrer que la fonction

$$f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R},\quad f(x)=\begin{cases}\sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x\in(0,1]\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$$

est intégrable.

Solution. La fonction est continue sur $(0,1]$ et bornée sur $[0,1]$ car $|\sin(\frac{1}{x})|\leq 1$ pour tout x. Elle est donc intégrable par la Proposition 6.10. ☐

6.3 Propriétés

La proposition suivante sera utile pour démontrer certaines propriétés de l'intégrale :

Proposition 6.12. *Soient $A\subseteq\mathbb{R}$ et $B\subseteq\mathbb{R}$ des ensembles non vides et soit*

$$A+B\coloneqq\{a+b : a\in A \text{ et } b\in B\}.$$

(1) *Si A et B sont bornés supérieurement, alors $A+B$ l'est aussi et*

$$\sup(A+B)\leq\sup(A)+\sup(B).$$

(2) *Si A et B sont bornés inférieurement, alors $A+B$ l'est aussi et*

$$\inf(A+B)\geq\inf(A)+\inf(B).$$

Démonstration. Montrons (1). Pour tout $a\in A$ et tout $b\in B$, on a $a\leq\sup(A)$ et $b\leq\sup(B)$. Donc

$$a+b\leq\sup(A)+\sup(B),\quad \text{pour tout } a\in A \text{ et } b\in B.$$

Il s'ensuit que $A+B$ est borné supérieurement par $\sup(A)+\sup(B)$. Puisque $\sup(A+B)$ est la plus petite borne supérieure, on a $\sup(A+B)\leq\sup(A)+\sup(B)$. La démonstration de (2) est semblable. ☐

Le prochain résultat montre que l'intégrale est une application linéaire.

Théorème 6.13. *Soient $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ des fonctions intégrables.*

(1) *La fonction $f+g$ est intégrable et*

$$\int_a^b(f(x)+g(x))dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx.$$

(2) *Pour tout $c \in \mathbb{R}$, la fonction cf est intégrable et*

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx.$$

Démonstration. Montrons (1). Soit P une partition de $[a,b]$. On a

$$\begin{aligned} M_i(f+g,P) &= \sup\{f(x)+g(x) : x \in [x_{i-1},x_i]\} \\ &\leq \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1},x_i]\} + \sup\{g(x) : x \in [x_{i-1},x_i]\} && \text{(Proposition 6.12(1))} \\ &= M_i(f,P) + M_i(g,P). \end{aligned}$$

De même, on a

$$\begin{aligned} m_i(f+g,P) &= \inf\{f(x)+g(x) : x \in [x_{i-1},x_i]\} \\ &\geq \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1},x_i]\} + \inf\{g(x) : x \in [x_{i-1},x_i]\} && \text{(Proposition 6.12(2))} \\ &= m_i(f,P) + m_i(g,P). \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\overline{S}(f+g,P) \leq \overline{S}(f,P) + \overline{S}(g,P) \quad \text{et} \quad \underline{S}(f+g,P) \geq \underline{S}(f,P) + \underline{S}(g,P)$$

et donc

$$\overline{S}(f+g,P) - \underline{S}(f+g,P) \leq \big(\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P)\big) + \big(\overline{S}(g,P) - \underline{S}(g,P)\big) \tag{6.3}$$

pour toute partition P de $[a,b]$.

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque f et g sont intégrable, le critère de Riemann (Théorème 6.7) implique qu'il existe des partitions P_1 et P_2 telles que $\overline{S}(f,P_1) - \underline{S}(f,P_1) < \frac{\varepsilon}{2}$ et $\overline{S}(g,P_2) - \underline{S}(g,P_2) < \frac{\varepsilon}{2}$. Soit $P = P_1 \cup P_2$. La partition P est un raffinement de P_1 et P_2, donc on a

$$\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) < \tfrac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad \overline{S}(g,P) - \underline{S}(g,P) < \tfrac{\varepsilon}{2}. \tag{6.4}$$

par la Proposition 6.2. Par (6.3), on a

$$\overline{S}(f+g,P) - \underline{S}(f+g,P) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Par le critère de Riemann (Théorème 6.7), $f+g$ est intégrable. De plus, par (6.4), on a

$$\begin{aligned} \int_a^b (f(x)+g(x))dx &\leq \overline{S}(f+g,P) \\ &\leq \overline{S}(f,P) + \overline{S}(g,P) \\ &< \underline{S}(f,P) + \frac{\varepsilon}{2} + \underline{S}(g,P) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx + \varepsilon \end{aligned}$$

pour tout $\varepsilon > 0$, donc

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx \leq \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

Un argument similaire montre que

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx \geq \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

ce qui prouve (1).

La démonstration de (2) est laissée en exercice (Exercice **(6.7)**). $\square$

La proposition suivante sera utile pour le prochain théorème.

Proposition 6.14. *Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ un ensemble non vide et borné, et soit $M \geq 0$. Alors,*

$$\sup A - \inf A \leq M$$

si et seulement si

$$|a-b| \leq M \quad \textit{pour tous } a, b \in A.$$

Démonstration. ($\Rightarrow$) Supposons que $\sup(A) - \inf(A) \leq M$. Soit $a, b \in A$. Si $a \geq b$, alors $|a-b| = a-b \leq \sup(A) - \inf(B) \leq M$. De même, si $a \leq b$, alors $|a-b| = b-a \leq \sup(A) - \inf(B) \leq M$.

($\Leftarrow$) Supposons que $|a-b| \leq M$ pour tous $a, b \in A$. Pour tous $a, b \in A$, on a $a - b \leq |a-b| \leq M$, donc $a \leq M + b$. Il s'ensuit que $M + b$ est une borne supérieure de A, donc $\sup(A) \leq M + b$ pour tout $b \in A$. On a alors $\sup(A) - M \leq b$ pour tout $b \in A$, c'est-à-dire, $\sup(A) - M$ est une borne inférieure pour A, et donc $\sup(A) - M \leq \inf(A)$. Il s'ensuit que $\sup(A) - \inf(A) \leq M$. $\square$

Théorème 6.15. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable et $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(x) \in [c, d]$ pour tout $x \in [a, b]$. Alors, la composition $g \circ f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est intégrable.*

Démonstration. Montrons que le critère de Riemann (Théorème 6.7) est satisfait. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $M = \sup\{|g(x)| : x \in [c, d]\}$. Toute fonction continue sur un segment $[c, d]$ est uniformément continue (Proposition 4.32), donc il existe un nombre δ tel que $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{2M}$ et

$$|g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \qquad \text{pour tous } x, y \in [c, d] \text{ tels que } |x - y| < \delta.$$

Par l'intégrabilité de f et le critère de Riemann (Théorème 6.7), il existe une partition $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$ telle que $\overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) < \delta^2$. Soit

$$\begin{aligned} A &:= \{i : M_i(f, P) - m_i(f, P) < \delta\} \\ B &:= \{i : M_i(f, p) - m_i(f, P) \geq \delta\}. \end{aligned}$$

Si $i \in A$ et $x, y \in [x_{i-1}, x_i]$, alors $|f(x) - f(y)| < \delta$ (par la Proposition 6.14), donc $|g(f(x)) - g(f(y))| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. On a alors

$$M_i(g \circ f, P) - m_i(g \circ f, P) < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \qquad \text{pour tout } i \in A$$

(par la Proposition 6.14). Si $i \in B$, alors $M_i(f, P) - m_i(f, P) \geq \delta$, donc

$$\begin{aligned} \delta \sum_{i \in B} (x_i - x_{i-1}) &\leq \sum_{i \in B} (M_i(f, P) - m_i(f, P))(x_i - x_{i-1}) \\ &\leq \overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) \\ &< \delta^2. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\sum_{i \in B} (x_i - x_{i-1}) < \delta.$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\overline{S}(g\circ f,P)-\underline{S}(g\circ f,P) &= \sum_{i=1}^{n}(M_i(g\circ f,P)-m_i(g\circ f,P))(x_i-x_{i-1})\\
&= \sum_{i\in A}(M_i(g\circ f,P)-m_i(g\circ f,P))(x_i-x_{i-1})\\
&\quad+\sum_{i\in B}(M_i(g\circ f,P)-m_i(g\circ f,P))(x_i-x_{i-1})\\
&< \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\sum_{i\in A}(x_i-x_{i-1})+2M\sum_{i\in B}(x_i-x_{i-1})\\
&< \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a)+2M\delta\\
&< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.
\end{aligned}$$

Par le critère de Riemann (Théorème 6.7), $g\circ f$ est intégrable. □

Théorème 6.16. *Si $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ sont intégrables, alors $fg:[a,b]\to\mathbb{R}$ est intégrable.*

Démonstration. On a $fg=\frac{1}{4}(f+g)^2-\frac{1}{4}(f-g)^2$. Il suffit donc de montrer que si f est intégrable, alors f^2 l'est aussi. Ceci découle du Théorème 6.15 avec $g(x)=x^2$. □

Théorème 6.17. *Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction intégrable et $c\in[a,b]$. Alors, les restrictions $f|_{[a,c]}:[a,c]\to\mathbb{R}$ et $f|_{[c,b]}:[c,b]\to\mathbb{R}$ sont intégrables et*

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx.$$

Démonstration. Soit $\varepsilon>0$. Par le critère de Riemann, il existe une partition Q de $[a,b]$ telle que $\overline{S}(f,Q)-\underline{S}(f,Q)<\frac{\varepsilon}{2}$. En ajoutant c à Q, on a un raffinement P, satisfaisant $\overline{S}(f,P)-\underline{S}(f,P)\leq\overline{S}(f,Q)-\underline{S}(f,Q)<\frac{\varepsilon}{2}$. Soit $P_1=P\cap[a,c]$ et $P_2=P\cap[c,b]$, on a que P_1 et P_2 sont des partitions de $[a,b]$ et $[b,c]$, respectivement, telles que

$$\underline{S}(f,P)=\underline{S}(f|_{[a,c]},P_1)+\underline{S}(f_{[c,b]},P_2)\quad\text{et}\quad\overline{S}(f,P)=\overline{S}(f|_{[a,c]},P_1)+\overline{S}(f|_{[c,b]},P_2).$$

Il s'ensuit que

$$0\leq\left(\overline{S}(f|_{[a,c]},P_1)-\underline{S}(f|_{[a,c]},P_1)\right)+\left(\overline{S}(f|_{[c,b]},P_2)-\underline{S}(f_{[c,b]},P_2)\right)\leq\overline{S}(f,P)-\underline{S}(f,P)<\frac{\varepsilon}{2},$$

donc

$$\begin{aligned}
\overline{S}(f|_{[a,c]},P_1)-\underline{S}(f|_{[a,c]},P_1)&<\frac{\varepsilon}{2}\\
\overline{S}(f|_{[c,b]},P_2)-\underline{S}(f_{[c,b]},P_2)&<\frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Par le critère de Riemann (Théorème 6.7), $f|_{[a,c]}$ et $f|_{[c,b]}$ sont intégrable. De plus,

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx\leq\overline{S}(f,P)<\underline{S}(f,P)+\frac{\varepsilon}{2}\leq\int_a^b f(x)dx+\frac{\varepsilon}{2}\\
\int_a^c f(x)dx\leq\overline{S}(f|_{[a,c]},P_1)<\int_a^c f(x)dx+\frac{\varepsilon}{2}\\
\int_c^b f(x)dx\leq\overline{S}(f|_{[c,b]},P_2)<\int_c^b f(x)dx+\frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

On a donc

$$\int_a^b f(x)dx \leq \overline{S}(f,P) = \overline{S}(f|_{[a,c]},P_1) + \overline{S}(f|_{[c,b]},P_2) < \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx + \varepsilon.$$

et

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \leq \overline{S}(f|_{[a,c]},P_1) + \overline{S}(f|_{[c,b]},P_2) = \overline{S}(f,P) < \int_a^b f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Puisque $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on trouve

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

□

Proposition 6.18. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable telle que*

$$m \leq f(x) \leq M, \qquad \textit{pour tout } x \in [a,b].$$

Alors,

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

En particulier, si $|f(x)| \leq M$ pour tout $x \in [a,b]$, alors

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq M(b-a).$$

Démonstration. L'ensemble $P = \{a,b\}$ est une partition de $[a,b]$ telle que

$$\overline{S}(f,P) \leq M(b-a)$$

et

$$\underline{S}(f,P) \geq m(b-a).$$

Puisque $\underline{S}(f,P) \leq \int_a^b f(x)dx \leq \overline{S}(f,P)$ pour toute partition P, le résultat suit. □

6.4 Théorème fondamental du calcul différentiel et intégral

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Par le Théorème 6.17, pour tout $x \in [a,b]$, la restriction de f sur $[a,x]$ est aussi intégrable. En particulier, on peut définir une fonction

$$F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_a^x f(t)dt. \tag{6.5}$$

Théorème 6.19 (Théorème fondamental du calcul différentiel et intégral – Partie 1)**.** *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable et soit $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par (6.5). Si f est continue en x_0, alors F est différentiable en x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$.*

Démonstration. On doit montrer que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0). \tag{6.6}$$

Pour tout $x \in [a,b]$ tel que $x \geq x_0$, on a

$$F(x) - F(x_0) = \int_a^x f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt = \int_a^{x_0} f(t)dt + \int_{x_0}^x f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt = \int_{x_0}^x f(t)dt$$

par le Théorème 6.17. La même formule est valide si $x \leq x_0$, car $F(x) - F(x_0) = -(F(x_0) - F(x)) = -\int_x^{x_0} f(t)dt = \int_{x_0}^x f(t)dt$. Il s'ensuit que

$$F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^x f(t)dt, \qquad \text{pour tout } x \in [a,b]. \tag{6.7}$$

Pour montrer (6.6), soit $\varepsilon > 0$. Puisque f est continue en x_0, il existe $\delta > 0$ tel que si $|x - x_0| < \delta$ alors $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Pour tout $x \in [a,b]$ tel que $|x - x_0| < \delta$, on a

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| &= \left|\frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x f(t)dt - \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x f(x_0)dt\right| && \text{(par (6.7) et l'Exemple 6.5)}\\
&= \left|\frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0))dt\right| && \text{(Théorème 6.13(1))}\\
&= \frac{1}{|x - x_0|}\left|\int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0))dt\right|.
\end{aligned}$$

Puisque $|f(t) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $t \in [x_0, x]$, la Proposition 6.18 implique que

$$\left|\int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0))dt\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}|x - x_0|.$$

On a donc

$$\left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| \leq \frac{1}{|x - x_0|}\frac{\varepsilon}{2}|x - x_0| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

pour tout $x \in [a,b]$ tel que $|x - x_0| < \delta$. Il s'ensuit que $\lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$, c'est-à-dire F est différentiable en x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$. □

Théorème 6.20 (Théorème fondamental du calcul différentiel et intégral – Partie 2)**.** *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable et $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et différentiable sur (a,b) telle que $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in (a,b)$. Alors,*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Démonstration. Soit $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ une partition de $[a,b]$. Par le théorème des accroissements finis (Théorème 5.15), il existe $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tel que

$$f(c_i) = F'(c_i) = \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}},$$

et donc

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(c_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Il s'ensuit que

$$\sum_{i=1}^n f(c_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n (F(x_i) - F(x_{i-1})) = F(b) - F(a).$$

Puisque

$$m_i(f,P) \leq f(c_i) \leq M_i(f,P)$$

pour tout i, on a

$$\underline{S}(f,P) \leq F(b) - F(a) \leq \overline{S}(f,P). \tag{6.8}$$

Puisque la partition P est arbitraire, (6.8) montre que

$$\int_a^b f(x)dx = \sup\{\underline{S}(f,P) : P \text{ est une partition de } [a,b]\} \leq F(b) - F(a)$$

et

$$\int_a^b f(x)dx = \inf\{\overline{S}(f,P) : P \text{ est une partition de } [a,b]\} \geq F(b) - F(a).$$

Ces deux inégalités impliquent que $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. $\square$

Les deux théorèmes combinés montrent que toute fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est la dérivée d'une fonction $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, et que l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ est égale à $F(b) - F(a)$. Il s'ensuit que l'intégrale de toute fonction continue f peut être calculée en trouvant une fonction F telle que $F' = f$.

Exemple 6.21. Calculer $\int_0^{\pi/2} \cos(x)dx$.

Solution. On a $\sin' x = \cos x$ pour tout x, donc par la deuxième partie du théorème fondamental du calcul différentiel et intégral (Théorème 6.20), on a

$$\int_0^{\pi/2} \cos(x)dx = \sin(\pi/2) - \sin(0) = 1.$$ $\square$

6.5 Exercices

(6.1) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction croissante. Soit $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ la partition de $[a,b]$ donnée par $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. Montrer que

$$\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) = (f(b) - f(a))\frac{b-a}{n}.$$

Déduire que f est intégrable. De même, montrer que toute fonction décroissante est intégrable.

(6.2) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. Montrer que s'il existe une partition P de $[a,b]$ telle que $\overline{S}(f,P) = \underline{S}(f,P)$, alors f est intégrable et $\int_a^b f(x)dx = \overline{S}(f,P) = \underline{S}(f,P)$.

(6.3) Montrer que la fonction

$$f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ x & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

n'est pas intégrable. (Indice : Soit $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ une partition, on a $\sum_{i=1}^n x_i(x_i - x_{i-1}) = \frac{1}{2}(x_n^2 - x_0^2 + \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})^2) \geq \frac{1}{2}(x_n^2 - x_0^2)$.)

(6.4) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable et soit $c \in \mathbb{R}$ tel que $c \neq f(0)$. Montrer que la fonction

$$g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} c & \text{si } x = 0 \\ f(x) & \text{si } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

est intégrable.

(6.5) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a,b]$ et $\int_a^b f(x)dx = 0$. Montrer que $f(x) = 0$ pour tout $x \in [a,b]$.

(6.6) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée avec un nombre fini de discontinuités, c'est-à-dire, il existe $c_1, c_2, \ldots, c_n \in (a,b)$ tels que f est continue sur (a, c_1), (c_1, c_2), (c_2, c_3), …, (c_n, b). Montrer que f est intégrable. (Indice : Utiliser la Proposition 6.10 sur chaque intervalle $[a, c_1], [c_1, c_2]$, …, $[c_n, b]$, et appliquer le critère de Riemann sur chaque intervalle.)

(6.7) Démontrer la partie (2) du Théorème 6.13. (Indice : considérer les cas $c > 0$, $c = 0$, et $c < 0$ séparément.)

(6.8) Montrer que si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable, alors $|f|$ est aussi intégrable et

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

(6.9) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable et soit $c \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction

$$g : [a+c, b+c] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = f(x-c)$$

est intégrable et que

$$\int_{a+c}^{b+c} f(x-c)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

(6.10) Trouver une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que

$$f(x)^2 = 2\int_0^x f(t)dt + 1$$

pour tout $x \in [0,1]$.

(6.11) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer qu'il existe $c \in (a,b)$ tel que

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(c).$$

(Indice : Combiner le théorème des accroissements finis et le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral.)

(6.12) (Intégration par parties) Soit $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ et $v : [a, b] \to \mathbb{R}$ des fonctions différentiables. Montrer que

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(x)v(x)dx.$$

(6.13) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Montrer que la fonction

$$F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_a^x f(x)dx$$

est lipschitzienne et donc uniformément continue.

(6.14) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(nx)dx = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0. \end{cases}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin(nx)dx = 0.$$

Chapitre 7

Limites de fonctions

Il y a plusieurs façons de définir la limite d'une suite de fonctions $f_n : D \to \mathbb{R}$. Dans chacune de ces définitions, l'idée est que la fonction limite $f : D \to \mathbb{R}$ doit être approximée de plus en plus précisément par la fonction f_n plus n est grand. Différentes façons de comparer f_n et f donnent différentes définitions de convergence. Dans ce chapitre, on définit deux de ces notions de convergence, soit la convergence ponctuelle et uniforme, et on montre que la deuxième notion est la plus appropriée dans de nombreuses situations.

7.1 Convergence ponctuelle et uniforme

Définition 7.1. Une ***suite de fonctions*** est une suite $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ où $f_n : D \to \mathbb{R}$ sont des fonctions de domaine commun D. On dit que $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ ***converge ponctuellement*** vers une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ si pour tout $x \in D$ la suite $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ converge vers $f(x)$ au sens usuel de la Définition 2.2, c'est-à-dire,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad \text{pour tout } x \in D.$$

Bien que cette notion de convergence soit la plus simple à énoncer, elle comporte de nombreux problèmes. Entre autres, si toutes les fonctions $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ sont continues et la suite $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge ponctuellement vers f, alors f n'est pas nécessairement continue :

Exemple 7.2. Soit $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$. Par l'Exemple 2.16, on a $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ si $0 \le x < 1$ et $\lim_{n\to\infty} f_n(1) = 1$. Il s'ensuit que la suite $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge ponctuellement vers la fonction

$$f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

qui n'est pas continue.

Un autre problème avec la convergence ponctuelle survient lorsqu'on essaie d'interchanger la limite avec l'intégrale. C'est-à-dire que si les fonctions $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ sont intégrables et convergent ponctuellement, alors il n'est pas nécessairement vrai que

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)dx = \int_a^b \Big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\Big)\, dx.$$

Le prochain exemple illustre ce problème.

Exemple 7.3. Soit $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie en reliant $(0, 0)$, $(\frac{1}{n}, n)$, $(\frac{2}{n}, 0)$, et $(1, 0)$ par des droites, c'est-à-dire :

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{si } 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ n^2(\frac{2}{n} - x) & \text{si } \frac{1}{n} \le x \le \frac{2}{n} \\ 0 & \text{si } \frac{2}{n} \le x \le 1. \end{cases}$$

On a $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ pour tout $x \in [0,1]$, car si $0 < x \leq 1$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{2}{n} \leq x$ pour tout $n \geq N$, et donc $f_n(x) = 0$ pour tout $n \geq N$. La suite $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge donc ponctuellement vers la fonction constante $f(x) = 0$. L'intégrale $\int_0^1 f_n(x)dx$ est l'aire du triangle dont les sommets sont $(0,0)$, $(\frac{1}{n}, n)$, et $(\frac{2}{n}, 0)$, donc $\int_0^1 f_n(x)dx = 1$ pour tout n. Or, $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 0dx = 0 \neq 1 = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$.

Pour remédier à ces problèmes, et bien d'autres, on définit une autre notion de convergence :

Définition 7.4. Soit $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite de fonctions $f_n : D \to \mathbb{R}$. On dit que $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ ***converge uniformément*** vers une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $x \in D$ et tout $n \geq N$, on a $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

On montre facilement que si la suite $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge uniformément vers f, alors elle converge aussi ponctuellement vers f (Exercice **(7.1)**). La distinction entre les deux notions de convergence est que pour la convergence uniforme, le nombre $N \in \mathbb{N}$ ne dépend que de ε, et est indépendant de x.

Voici une première propriété préservée par la convergence uniforme :

Proposition 7.5. *Soit $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite de fonctions bornées $f_n : D \to \mathbb{R}$ qui converge uniformément vers une fonction $f : D \to \mathbb{R}$. Alors, f est bornée.*

Démonstration. Par la définition de convergence uniforme appliquée à $\varepsilon = 1$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|f_n(x) - f(x)| < 1$ pour tout $x \in D$ et tout $n \geq N$. Puisque f_N est bornée, il existe $M > 0$ tel que $|f_N(x)| \leq M$ pour tout $x \in D$. Il s'ensuit que pour tout $x \in D$, on a

$$|f(x)| = |(f(x) - f_N(x)) + f_N(x)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x)| \leq 1 + M,$$

donc f est bornée. □

Définition 7.6. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. La ***norme sup*** de f est le nombre réel

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in D\}.$$

Si f et g sont deux fonctions bornées, alors $f - g$ est aussi bornée, et on peut donc considérer $\|f - g\|$. Le nombre $\|f - g\| \geq 0$ est donc une façon de comparer f et g. C'est-à-dire que $\|f - g\| = 0$ si et seulement si $f = g$, et en général, $\|f - g\|$ est une mesure de la différence entre ces deux fonctions. Le prochain résultat montre que la convergence uniforme est la convergence provenant de cette façon de comparer des fonctions.

Théorème 7.7. *Soit $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite de fonctions bornées $f_n : D \to \mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction. Alors $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge uniformément vers f si et seulement si f est bornée et*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0.$$

Démonstration. ($\Longrightarrow$) Supposons que $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge uniformément vers f. Par la Proposition 7.5, f est bornée, et donc $\|f - f_n\|$ est défini pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Par la définition de la convergence uniforme, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $x \in D$ et tout $n \geq N$, on a $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Il s'ensuit que $\|f_n - f\| = \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in D\} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ pour tout $n \geq N$, c'est-à-dire, $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$.

($\Longleftarrow$) Supposons que f est bornée et que $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Par la définition de cette limite, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\|f_n - f\| < \varepsilon$ pour tout $n \geq N$. Il s'ensuit que si $x \in D$ et $n \geq N$, alors $|f_n(x) - f(x)| \leq \sup\{|f_n(y) - f(y) : y \in D\} = \|f_n - f\| < \varepsilon$. On conclut alors que $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge uniformément vers f. □

7.2 Propriétés de la convergence uniforme

Montrons d'abord que la convergence uniforme préserve la continuité, contrairement à la convergence ponctuelle (Exemple 7.2).

Théorème 7.8. *Soit $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite de fonctions continues $f_n : D \to \mathbb{R}$ qui converge uniformément vers une fonction $f : D \to \mathbb{R}$. Alors, f est continue.*

Démonstration. Soit $x_0 \in D$. Montrons que f est continue en x_0. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge uniformément vers f, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\|f - f_n\| < \frac{\varepsilon}{3}$ pour tout $n \geq N$ (Théorème 7.7). Par la continuité de f_N en x_0, il existe $\delta > 0$ tel que $|f_N(x) - f_N(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$ pour tout $x \in D$ tel que $|x - x_0| < \delta$. Il s'ensuit que si $x \in D$ et $|x - x_0| < \delta$, alors

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(x_0)| &= |(f(x) - f_N(x)) + (f_N(x) - f_N(x_0)) + (f_N(x_0) - f(x_0))| \\
&\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| \\
&\leq \|f - f_N\| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + \|f_N - f\| \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Donc f est continue en x_0. □

Exemple 7.9. La suite de fonctions $f_n(x) = x^n$ dans l'Exemple 7.2 ne converge donc pas uniformément, car la limite n'est pas continue.

On peut aussi montrer que la convergence uniforme est compatible avec l'intégration :

Théorème 7.10. *Soit $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite de fonctions continues sur un segment $[a, b]$ qui converge uniformément vers une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Alors, la suite de fonctions $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ définie par*

$$F_n : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad F_n(x) := \int_a^x f_n(t)dt$$

converge uniformément vers la fonction

$$F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) := \int_a^x f(t)dt.$$

En particulier,

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b f_n(t)dt \right) = \int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} f_n(t) \right) dt.$$

Démonstration. Puisque $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge uniformément vers f et que chaque fonction f_n est continue, la limite f est aussi continue (Théorème 7.8) et donc intégrable (Théorème 6.8). Pour tout $x \in [a, b]$, on a

$$\begin{aligned}
|F_n(x) - F(x)| &= \left| \int_a^x f_n(t)dt - \int_a^x f(t)dt \right| \\
&= \left| \int_a^x (f_n(t) - f(t))dt \right| && \text{(Théorème 6.13(1))} \\
&\leq (x - a) \sup\{|f_n(t) - f(t)| : t \in [a, x]\} && \text{(Proposition 6.18)} \\
&\leq (b - a)\|f_n - f\|.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$0 \leq \|F_n - F\| \leq |b - a|\|f_n - f\|. \tag{7.1}$$

Puisque $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge uniformément vers f, on a $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$ (Théorème 7.7). Par le théorème du sandwich (Théorème 2.5), les inégalités (7.1) impliquent que $\lim_{n\to\infty} \|F_n - F\| = 0$, donc $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ converge uniformément vers F. □

Exemple 7.11. La suite de fonction dans l'Exemple 7.3 ne converge pas ponctuellement, car l'intégrale de la limite n'est pas égale à la limite des intégrales.

On a aussi la compatibilité avec la dérivée :

Théorème 7.12. *Soit $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite de fonctions sur un segment $[a,b]$ qui converge ponctuellement vers une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Supposons que chaque $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ est différentiable, que la dérivée $f_n' : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue, et que la suite $(f_n')_{n=1}^{\infty}$ converge uniformément vers une fonction $g : [a,b] \to \mathbb{R}$. Alors, f est différentiable et $f'(x) = g(x)$ pour tout $x \in [a,b]$. En particulier,*

$$\frac{d}{dx} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{d}{dx} f_n(x), \qquad \textit{pour tout } x \in [a,b].$$

Démonstration. Puisque $(f_n')_{n=1}^{\infty}$ est une suite de fonctions continues qui converge uniformément vers g, la suite de fonctions

$$F_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad F_n(x) = \int_a^x f_n'(t)dt$$

converge uniformément vers la fonction

$$F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_a^x g(t)dt$$

(Théorème 7.10). Par la deuxième partie du théorème fondamental du calcul différentiel et intégral (Théorème 6.20), on a

$$F_n(x) = f_n(x) - f_n(a)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [a,b]$. Il s'ensuit que

$$\int_a^x g(t)dt = \lim_{n\to\infty} F_n(x) = \lim_{n\to\infty} (f_n(x) - f_n(a)) = f(x) - f(a),$$

et donc

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)dt, \tag{7.2}$$

pour tout $x \in [a,b]$. Puisque chaque dérivée f_n' est continue et que $(f_n')_{n=1}^{\infty}$ converge uniformément vers g, la fonction g est continue (Théorème 7.8). Par la première partie du théorème fondamental du calcul différential et intégral (Théorème 6.19), la fonction $G(x) = \int_a^x g(t)dt$ est différentiable et $G'(x) = g(x)$ pour tout $x \in [a,b]$. Par (7.2), f est différentiable et $f'(x) = g(x)$ pour tout $x \in [a,b]$. □

7.3 Séries de fonctions

Définition 7.13. Une ***série de fonctions*** est une expression de la forme

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n,$$

où $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ est une suite de fonctions $f_n : D \to \mathbb{R}$. La ***suite des sommes partielles*** est la suite de fonctions $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ définie par

$$s_n : D \longrightarrow \mathbb{R}, \quad s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x).$$

On dit que la série de fonctions $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ ***converge ponctuellement*** vers une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ si $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ converge ponctuellement vers f au sens de la Définition 7.1. De même, on dit que la série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ ***converge uniformément*** vers f si $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ converge uniformément vers f au sens de la Définition 7.4.

La plupart des propriétés de la convergence uniforme des suites de fonctions se généralisent immédiatement à la convergence uniforme des séries de fonctions. Par exemple, la continuité d'une limite uniforme (Théorème 7.8), la compatibilité avec l'intégrale (Théorème 7.10), et la compatibilité avec la dérivée (Théorème 7.12), ont des analogues pour les séries de fonctions. On ne démontre que la première de ces trois propriétés, car les démonstrations sont de simples applications des théorèmes correspondants sur les suites de fonctions.

Théorème 7.14. *Soit $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ une série de fonctions continues qui converge uniformément vers une fonction f. Alors, f est continue.*

Démonstration. Puisqu'une somme de fonctions continues est continue (Théorème 4.12(a)), les sommes partielles $s_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$ sont continues. Par la définition de la convergence uniforme de $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ vers f, la suite $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ converge uniformément vers f. Puisque chaque s_n est continue et que $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ converge uniformément vers f, la fonction f est aussi continue (Théorème 7.8). □

Théorème 7.15. *Soit $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ une série de fonctions continues $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ qui converge uniformément. Alors,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx.$$

Démonstration. Exercice **(7.12)**. □

Théorème 7.16. *Soit $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ une série de fonctions sur un segment $[a,b]$ qui converge ponctuellement vers une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Si chaque fonction f_n est différentiable, la dérivée f_n' est continue, et $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ converge uniformément sur $[a,b]$, alors f est différentiable et $f' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'$, c'est-à-dire*

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} f_n(x).$$

Démonstration. Exercice **(7.13)**. □

Le prochain résultat est un outil indispensable pour démontrer la convergence uniforme de séries de fonctions.

Théorème 7.17 (Critère de Weierstrass)**.** *Soit $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ une série de fonctions $f_n : D \to \mathbb{R}$. S'il existe une série convergente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (au sens du* Chapitre 3*) et un entier $N \in \mathbb{N}$ tels que*

$$|f_n(x)| \leq a_n \quad \textit{pour tout } x \in D \textit{ et } n \geq N, \tag{7.3}$$

alors $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformément.

Démonstration. Par le test de comparaison (Théorème 3.10), (7.3) implique que pour chaque $x \in D$ fixe, la série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge en tant que série de nombres réels, c'est-à-dire au sens de la Définition 3.1 du Chapitre 3. On peut alors définir une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ par

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \qquad \text{pour tout } x \in D.$$

Il suffit de montrer que la série de fonctions $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformément vers f. Soit $\varepsilon > 0$. Par le critère de Cauchy (Théorème 3.7), il existe $M \geq N$ tel que

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \text{pour tous } m > n \geq M.$$

Donc,

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{m} a_k < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \text{pour tous } m > n \geq M \text{ et } x \in D. \tag{7.4}$$

Soit $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ la suite des sommes partielles de $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$. Pour chaque $x \in D$ et $n \in \mathbb{N}$, on a

$$f(x) - s_n(x) = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} f_k(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x) = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=n+1}^{m} f_k(x). \tag{7.5}$$

Par (7.5) et (7.4), on a

$$|f(x) - s_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \quad \text{pour tout } x \in D \text{ et tout } n \geq M.$$

Il s'ensuit que $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ converge uniformément vers f. Par la définition de la converge uniforme d'une série, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformément vers f. $\square$

Exemple 7.18. Montrer que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$$

converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

Solution. On a $\left|\frac{\sin(nx)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Puisque $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge (Exemple 3.11), on conclut par le critère de Weierstrass (Théorème 7.17) que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$. $\square$

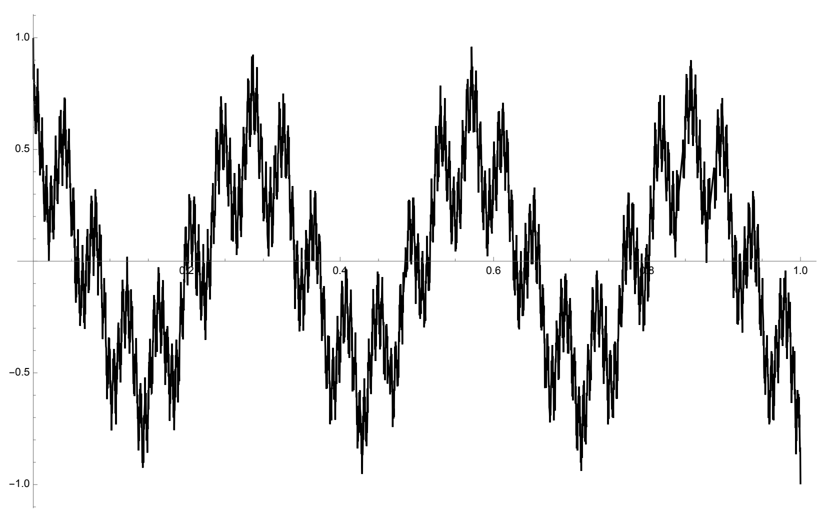
Exemple 7.19. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par la série

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(10^n \pi x)}{2^n}.$$

Cette série de fonctions converge uniformément sur $\mathbb{R}$ par le critère de Weierstrass (Théorème 7.17), car $\left|\frac{\cos(10^n \pi x)}{2^n}\right| \leq \frac{1}{2^n}$ et la série géométrique $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ converge (Exemple 3.2). Du plus, puisque chaque fonction $f_n(x) = \frac{\cos(10^n \pi x)}{2^n}$ est continue, on a que f est continue (Théorème 7.15). En revanche,

$$f_n'(x) = -\frac{10^n \pi \sin(10^n \pi x)}{2^n} = -5^n \pi \sin(10^n \pi x),$$

et la série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} -5^n \pi \sin(10^n \pi x)$ diverge pour tout x tel que $\sin(10^n \pi x) \neq 0$, car $-5^n \pi \sin(10^n \pi x)$ ne converge pas vers 0. Le Théorème 7.16 ne peut alors pas s'appliquer. Il est en fait possible de montrer que $f(x)$ est différentiable nulle part (voir, par exemple, [2, Section 8.4.9]). Son graphe ressemble à la figure suivante :



7.4 Séries de puissances

Une des plus importante famille de séries de fonctions est la suivante.

Définition 7.20. Une ***série de puissances*** est une série de fonctions (Définition 7.13) de la forme

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

où $a_n \in \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$.

Pour simplifier la notation, nous allons considérer dans cette section le cas où $x_0 = 0$, c'est-à-dire, les séries de puissances de la forme

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

On peut toujours se rammener à ce cas par une translation $x \mapsto x + x_0$ sans changer les propriétés de convergence, de continuité, etc.

Exemple 7.21. La ***série géométrique*** est la série de puissances

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Elle converge vers $\frac{1}{1-x}$ pour tout $x \in (-1, 1)$ (Exemple 3.2).

Exemple 7.22. La ***série exponentielle*** est définie par la série de puissances

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

La série converge pour tout $x \in \mathbb{R}$ par le test du rapport (Théorème 3.12), car

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x^{n+1}/(n+1)!|}{|x^n/n!|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0.$$

On a alors une fonction

$$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ une série de puissances. Notre première tâche est d'étudier l'ensemble des points où la série converge. Il est clair que $f(x)$ converge en $x = 0$, car $f(0) = a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0^2 + \cdots = a_0$. Certaines séries, comme $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ convergent pour tout $x \in \mathbb{R}$ (Exemple 7.22), alors que d'autres, comme $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$ convergent seulement pour $x = 0$ (Exercice **(7.20)**).

Lemme 7.23. *Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ une série de puissances. Si la série converge au point x_0, alors elle converge absolument en tout point x tel que $|x| < |x_0|$. Si la série diverge au point x_0, alors elle diverge en tout point x tel que $|x| > |x_0|$.*

Démonstration. Soit x_0 tel que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_0^n$ converge et soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < |x_0|$. La suite $(a_n x_0^n)_{n=1}^{\infty}$ converge vers 0 (Théorème 3.4), et est donc bornée (Proposition 2.8). Soit $M > 0$ tel que $|a_n x_0^n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \left| \frac{x^n}{x_0^n} \right| \leq M \left| \frac{x^n}{x_0^n} \right| = M r^n,$$

où $r := |\frac{x}{x_0}|$. Puisque $|r| < 1$, la série géométrique $\sum_{n=0}^{\infty} M r^n$ converge, donc $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n x^n|$ converge par le test de comparaison (Théorème 3.10).

Supposons maintenant que la série diverge au point x_0. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| > |x_0|$. Si la série converge au point x, alors elle converge aussi au point x_0 par le précédent paragraphe, une contradiction. Donc la série diverge au point x. $\square$

Théorème 7.24. *Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ une série de puissances. Il existe $R \geq 0$ ou $R = \infty$ tel que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge absolument si $|x| < R$ et diverge si $|x| > R$.*

Démonstration. Soit

$$E = \{r \in \mathbb{R} : r \geq 0 \text{ et } \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \text{ converge}\}.$$

On a $0 \in E$, donc E est non vide. Supposons d'abord que E n'est pas borné supérieurement. Montrons que $E = [0, \infty)$. Il est clair que $E \subseteq [0, \infty)$. Inversement, si $x \in [0, \infty)$, alors, x n'est pas une borne supérieure de E. Donc il existe $r \in E$ tel que $r > x$. Par le Lemme 7.23, la série converge en x, puisque qu'elle converge en r et $x < r$. Il s'ensuit que $x \in E$, et donc $E = [0, \infty)$. Dans ce cas, on peut prendre $R = \infty$.

Supposons maintenant que E est borné supérieurement. Dans ce cas, le supremum $R := \sup(E)$ existe. Il s'ensuit que si $|x| < R$, alors $|x|$ n'est pas une borne supérieure de E, donc il existe $r \in E$ tel que $|x| < r$. Par le Lemme 7.23 la série converge au point x. Soit $|x| > R$. Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge, alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ converge pour tout $R < r < |x|$, c'est-à-dire, $r \in E$ pour tout $R < r < |x|$, contredisant que $R = \sup(E)$. Donc $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ diverge. ☐

Définition 7.25. Le nombre R dans le Théorème 7.24 est appelé le ***rayon de convergence*** de la série de puissances $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Théorème 7.26. *Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ une série de puissances. Si*

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = R$$

existe, alors R est le rayon de convergence.

Démonstration. Si $R > 0$, alors $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \frac{|x|}{R}$, donc par le test du rapport (Théorème 3.12), la série converge si $\frac{|x|}{R} < 1$ et diverge si $\frac{|x|}{R} > 1$. Le cas $R = 0$ est laissé en exercice (Exercice **(7.19)**). ☐

Exemple 7.27. Le rayon de convergence de la série géométrique $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ (Exemple 7.21) est $R = 1$ car dans ce cas $a_n = 1$ pour tout n et donc la limite dans le Théorème 7.26 est égale à 1.

Exemple 7.28. Le rayon de convergence de la série exponentielle $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ est $R = \infty$ car la série converge pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Théorème 7.29. *Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ une série de puissances de rayon de convergence $R \neq 0$. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $-R < a < b < R$. Alors, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge uniformément sur $[a, b]$.*

Démonstration. Soit $M = \max(|a|, |b|)$. Pour tout $x \in [a, b]$, on a $|a_n x^n| \leq |a_n| M^n$. Puisque $-R < M < R$, on a que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n M^n$ converge par la définition du rayon de convergence R. Par le critère de Weierstrass (Théorème 7.17), $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge uniformément sur $[a, b]$. ☐

Théorème 7.30. *Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ une série de puissances de rayon de convergence $R \neq 0$. La fonction f est différentiable sur $(-R, R)$ et*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1},$$

pour tout $x \in (-R, R)$.

Démonstration. Soit $b \in (0, R)$. Montrons que les hypothèses du Théorème 7.16 sont satisfaites sur le segment $[-b, b]$. On doit d'abord montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ converge uniformément sur $[-b, b]$. Soit $y \in \mathbb{R}$ tel que $b < y < R$. Alors $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ converge, donc la suite $(a_n y^n)_{n=0}^{\infty}$ converge vers zero. En particulier, cette suite est bornée (Proposition 2.8). Soit $M > 0$ tel que $|a_n y^n| \leq M$ pour tout $n \geq 0$. Pour tout $x \in [-b, b]$, on a

$$|n a_n x^{n-1}| = n|a_n||x|^{n-1} \leq n|a_n| b^{n-1} = n|a_n y^n| \frac{b^{n-1}}{y^n} \leq nM \frac{b^{n-1}}{y^n} = \frac{M}{y} n r^{n-1},$$

où $r := \frac{b}{y} < 1$. La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M}{y} n r^{n-1}$ converge par le test du rapport (Théorème 3.12), car

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{M}{y}(n+1) r^n}{\frac{M}{y} n r^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) r = r < 1.$$

Par le critère de Weierstrass (Théorème 7.17), $\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$ converge uniformément sur $[-b, b]$. Le Théorème 7.16 implique alors que f est différentiable et que

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$$

pour tout $x \in [-b, b]$. Puisque $b \in (0, R)$ est arbitraire, cette equation est valide pour tout $x \in (-R, R)$. $\square$

Corollaire 7.31. *Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ une série de puissances de rayon de convergence $R \neq 0$. Alors, f est infiniment différentiable (c'est-à-dire $f^{(k)}$ existe pour tout $k \in \mathbb{N}$), et*

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n x^{n-k}.$$

En particulier,

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Exemple 7.32. Montrer que la série exponentielle (Exemple 7.22) est différentiable et que $\exp'(x) = \exp(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Solution. Le rayon de convergence de la série exponentielle est $R = \infty$, donc par le Théorème 7.30, la fonction $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est différentiable et

$$\exp'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{1}{n!} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \exp(x),$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. $\square$

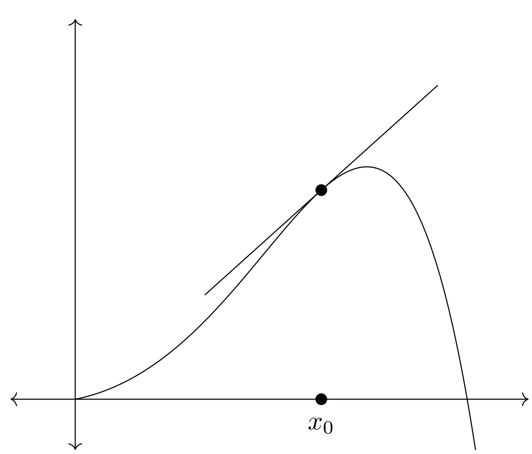
7.5 Séries de Taylor

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable et soit $x_0 \in (a, b)$. On a vu que la droite tangente

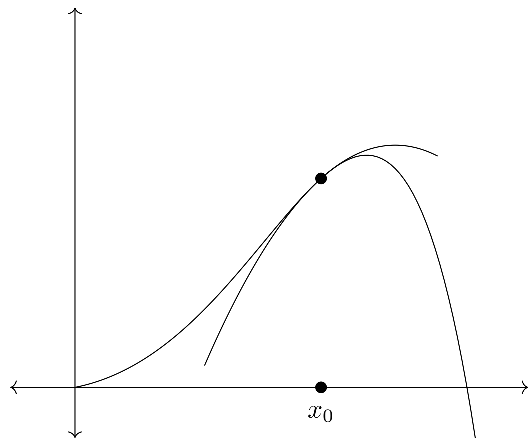
$$x \longmapsto f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

est une bonne approximation de f près de x_0 :

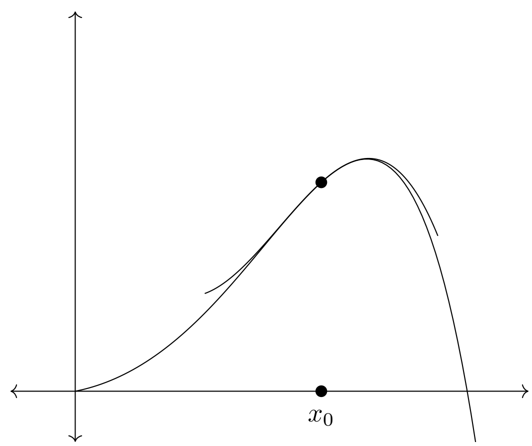
$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \qquad \text{pour } x \approx x_0.$$



Si l'on veut améliorer cette approximation, on peut essayer de trouver, par exemple, la fonction quadratique qui approxime le mieux $f(x)$ près de x_0 :



Mais comment trouver la meilleure approximation par une fonction quadratique ? Et par une fonction cubique, etc. ?



Le but de cette section est de répondre à ces questions.

Dû au Corollaire 7.31, il est naturel de penser (et nous le démontrerons) que le polynôme d'ordre n approximant le mieux $f(x)$ est le suivant.

Définition 7.33. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in D$ tel que $f'(x_0), f''(x_0), \ldots, f^{(n)}(x_0)$ existent. Le ***polynôme de Taylor d'ordre*** n ***au point*** x_0 est le polynôme

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

On note que $P_n(0) = f(x_0)$, $P_n'(0) = f'(x_0)$, et plus généralement, $P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$ pour tout $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. C'est-à-dire, le polynôme $P_n(x)$ a les mêmes n premières dérivées que f au point x_0. On peut en fait facilement montrer que $P_n(x)$ est l'unique polynôme de degré n avec cette propriété (Exercice **(7.24)**). Il est alors intuitivement clair que $P_n(x)$ est une bonne approximation de f près de x_0. Plus précisément, on a :

Théorème 7.34 (Théorème de Taylor)**.** *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $f', f'', \ldots, f^{(n+1)}$ existent sur $[a, b]$. Soit $x_0 \in [a, b]$ et P_n le polynôme de Taylor d'ordre n au point x_0. Pour tout $x \in [a, b]$, il existe un point c compris entre x_0 et x tel que*

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}. \tag{7.6}$$

Démonstration. Soit $x \in [a,b]$. Si $x = x_0$, alors (7.6) est valide pour tout c. On peut donc supposer que $x \neq x_0$. Soit $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(x) = P_n(x) + M(x - x_0)^{n+1}. \tag{7.7}$$

(C'est-à-dire, $M = \frac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}$.) On doit montrer qu'il existe c entre x_0 et x tel que $M = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$. Soit

$$g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(y) = f(y) - P_n(y) - M(y - x_0)^{n+1}.$$

On a

$$g^{(n+1)}(y) = f^{(n+1)}(y) - (n+1)!M.$$

Il suffit alors de montrer que $g^{(n+1)}(c) = 0$ pour un point c entre x_0 et x. Puisque $P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$ pour tout $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, on a

$$g(x_0) = 0, \quad g'(x_0) = 0, \quad g''(x_0) = 0, \quad \ldots, \quad g^{(n)}(x_0) = 0.$$

On a aussi $g(x) = f(x) - P_n(x) - M(x - x_0)^{n+1} = 0$ par (7.7). Par le théorème des accroissements finis (Théorème 5.15), il existe c_1 entre x_0 et x tel que

$$\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = g'(c_1).$$

Puisque $g(x) = 0$ et $g(x_0) = 0$, on a $g'(c_1) = 0$. De même, puisque $g'(x_0) = g'(c_1) = 0$, le théorème des accroissements finis (Théorème 5.15) implique qu'il existe c_2 entre x_0 et c_1 tel que $g''(c_2) = 0$. En continuant de la sorte, on obtient un nombre c_{n+1} entre x_0 et x tel que $g^{(n+1)}(c_{n+1}) = 0$. $\square$

En particulier, le théorème de Taylor (Théorème 7.34) implique que si $f^{(n+1)}$ est bornée par une constante $M \geq 0$, alors

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x), \quad \text{pour tout } x \in [a,b],$$

où $R_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction telle que

$$|R_n(x)| \leq \frac{M|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}, \qquad \text{pour tout } x \in [a,b].$$

Notons que $\lim_{n\to\infty} \frac{M|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ car la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{M|x-x_0|^n}{n!} = M\exp(|x-x_0|)$ converge. Donc la fonction R_n est petite quand n est grand. La condition que $f^{(n+1)}$ soit bornée est valide, par exemple, si $f^{(n+2)}$ existe car toute fonction différentiable est continue (Proposition 5.6) et toute fonction continue est bornée (Théorème 4.21).

Exemple 7.35. Trouvons une approximation quintique (d'ordre 5) de la fonction $\sin x$ près de 0. Le polynôme de Taylor est de la forme

$$P_5(x) = \sin(0) + \sin'(0)x + \sin''(0)\frac{x^2}{2} + \sin^{(3)}(0)\frac{x^3}{6} + \sin^{(4)}(0)\frac{x^4}{24} + \sin^{(5)}(0)\frac{x^5}{120}.$$

On a

$$\begin{aligned} \sin''(x) &= -\sin(x) \\ \cos''(x) &= -\cos(x), \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \sin(0) &= 0 \\ \sin''(0) &= -\sin(0) = 0 \\ \sin^{(4)}(0) &= -\sin''(0) = 0, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\sin'(0) &= \cos(0) = 1\\ \sin^{(3)}(0) &= -\sin'(0) = -1\\ \sin^{(5)}(0) &= -\sin^{(3)}(0) = 1.\end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$P_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$$

Par le théorème de Taylor (Théorème 7.34), pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe c entre 0 et x tel que

$$|\sin(x) - P_5(x)| = \left|\frac{\sin^{(6)}(c)}{6!}x^6\right| = \left|\frac{-\sin(c)}{6!}x^6\right| \leq \frac{|x|^6}{6!}.$$

Par exemple, si $-1 \leq x \leq 1$, la difference entre $\sin(x)$ et $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ est d'au plus $\frac{|x|}{6!} \leq \frac{1}{6!} < 0.002$.

Puisque chaque polynôme de Taylor approxime de mieux en mieux la fonction, il est naturel de prendre la limite :

Définition 7.36. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction infiniment différentiable et soit $x_0 \in D$. La ***série de Taylor de f centrée en*** x_0 est la série de puissances

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \lim_{n\to\infty} P_n(x).$$

Il n'est pas toujours vrai que la série de Taylor d'une fonction f converge vers f. Par exemple, on peut montrer que la fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x^2}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est infiniment différentiable et que $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout n. Il s'ensuit que, dans ce cas, la série de Taylor de f est égale à 0 et donc ne converge pas vers f. Le prochain résultat donne un critère pour obtenir la convergence de la série de Taylor de f vers f.

Théorème 7.37. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction infiniment différentiable et soit $x_0 \in [a, b]$. S'il existe $M > 0$ tel que $|f^{(n)}(x)| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [a, b]$, alors la série de Taylor converge vers $f(x)$ pour tout $x \in [a, b]$.*

Démonstration. Soit $x \in [a, b]$. Par le théorème de Taylor (Théorème 7.34), pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $c_n \in [a, b]$ tel que

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(c_n)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Il s'ensuit que

$$|P_n(x) - f(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(c_n)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}\right| \leq \frac{M|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Puisque $\lim_{n\to\infty} \frac{M|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ (voir le paragraphe au dessus de l'exemple 7.35), on a que

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x). \tag{7.8}$$

La suite des sommes partielles de la série de Taylor $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ est la suite $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ des polynômes de Taylor, donc (7.8) montre que cette série converge vers $f(x)$ pour tout $x \in [a, b]$. □

Exemple 7.38. Montrer que la série de Taylor de $\sin(x)$ centrée en 0 est donnée par

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

et qu'elle converge vers $\sin(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Pour calculer la série de Taylor, il suffit de montrer que

$$\sin^{(2n)}(0) = 0 \quad \text{et} \quad \sin^{(2n+1)}(0) = (-1)^n \tag{7.9}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} \sin^{(2n)}(x) &= \cos^{(2n-1)}(x) = -\sin^{(2n-2)}(x) = \cdots = (-1)^n \sin(x) \\ \sin^{(2n+1)}(x) &= \cos^{(2n)}(x) = -\sin^{(2n-1)}(x) = \cdots = (-1)^n \sin^{(1)}(x) = (-1)^n \cos(x). \end{aligned}$$

et on obtient donc (7.9) en évaluant à $x = 0$. La série converge vers $\sin(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ par le Théorème 7.37, car le dernier calcul montre que $|\sin^{(n)}(x)| \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. $\square$

7.6 Exercices

(7.1) Soit $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite de fonctions qui converge uniformément vers f. Montrer que $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge ponctuellement vers f.

(7.2) Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ définies par

$$f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{x}{n}$$

ne converge pas uniformément.

(7.3) Soit

$$f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}.$$

Est-ce que la suite $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge uniformément ? (Indice : Trouver le maximum et le minimum.)

(7.4) Soit

$$f_n : [0, \tfrac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = n\sin(\tfrac{x}{n}).$$

Montrer que la suite $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge uniformément vers la fonction

$$f : [0, \tfrac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x.$$

(Indice : Utiliser l'Exemple 5.21.)

(7.5) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue et soit $f_n(x) = f(x + \frac{1}{n})$. Montrer que la suite $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge uniformément vers f.

(7.6) Soient $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ et $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ des suites de fonctions sur un domaine D qui convergent uniformément vers des fonctions $f, g : D \to \mathbb{R}$. Montrer que $(f_n + g_n)_{n=1}^{\infty}$ converge uniformément vers $f + g$.

(7.7) Soit $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite de fonctions bornées $f_n : D \to \mathbb{R}$ qui converge uniformément vers une fonction $f : D \to \mathbb{R}$. Montrer que la suite de nombres réels $(\|f_n\|)_{n=1}^{\infty}$ est bornée. (Indice : Utiliser la Proposition 7.5.)

(7.8) Soit $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ et $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ des suites de fonctions bornées sur un domaine D qui convergent uniformément vers des fonctions $f, g : D \to \mathbb{R}$. Montrer que $(f_n g_n)_{n=1}^{\infty}$ converge uniformément vers fg. (Indice : $|f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)| = |f_n(x)(g_n(x) - g(x)) + (f_n(x) - f(x))g(x)|$. Utiliser **(7.7)**.)

(7.9) Soit $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ la suite définie par $f_n : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = (\sin x)^n$. Montrer que la suite $(f_n')_{n=1}^{\infty}$ ne converge pas uniformément. (Indice : Faire une preuve par contradiction en utilisant le Théorème 7.12).

(7.10) Calculer

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^3 \frac{2n + \sin x}{3n + (\cos x)^2} dx.$$

(Indice : Montrer que $\frac{2n+\sin x}{3n+(\cos x)^2}$ converge uniformément vers $\frac{2}{3}$ et utiliser le Théoème 7.10).

(7.11) Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^{\pi} \frac{\sin nx}{nx} dx = 0,$$

pour tout $0 < a < \pi$.

(7.12) Démontrer le Théorème 7.15. (Indice : utiliser le Théorème 7.10.)

(7.13) Démontrer le Théorème 7.16. (Indice : utiliser le Théorème 7.12.)

(7.14) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^2}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

(7.15) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n=0}^{\infty}(1-x)x^n$ converge ponctuellement sur $[0, 1]$, mais pas uniformément.

(7.16) Montrer que

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(7.17) Trouver tous les nombres $a > 0$ tels que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ converge uniformément sur $[-a, a]$.

(7.18) Trouver le rayon de convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$.

(7.19) Terminer la démonstration du Théorème 7.26. C'est-à-dire, montrer que si $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = 0$, alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge seulement si $x = 0$.

(7.20) Montrer que la série $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$ converge seulement si $x = 0$.

(7.21) Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ une série de puissances telle que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$$

existe. Montrer que le rayon de convergence de la série est $R = 1/L$ si $L > 0$ et $R = \infty$ si $L = 0$.

(7.22) Trouver le rayon de convergence des séries suivantes.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+3) x^n$

(7.23) Soit la fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt.$$

Trouver la série de Taylor de f centrée en 0 et son rayon de convergence. (Indice : utiliser le Théorème 7.15).

(7.24) Montrer que le polynôme de Taylor $P_n(x)$ d'une fonction $f(x)$ centrée en x_0 est l'unique polynôme de degré n tel que $P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$ pour $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Bibliographie

[1] Robert G. Bartle et Donald R. Sherbert. *Introduction to real analysis*. Second. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1992, p. xii+404.

[2] Kenneth R. Davidson et Allan P. Donsig. *Real analysis and applications : Theory in practice*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, New York, 2010, p. xii+513.

[3] Jacques Labelle et Armel Mercier. *Introduction à l'analyse réelle*. Montréal (Québec) : Modulo, 1993, p. 414.

[4] Walter Rudin. *Principles of mathematical analysis*. Second. McGraw-Hill Book Co., New York, 1964, p. ix+270.